James Clerk Maxwell (1831–1879)

1864: elektrom. Wellen vorhergesagt
1866: Entwicklung d. kin. Gastheorie

Ehrungen:
- magn. Flusseinheit (cgs): Maxwell
- Venus: Gebirgskette
- JCMT: Sub-mm Teleskop
- Mondkrater, Asteroiden ...

Exkurs: griech. Philosophie → 4 Grundkräfte

↙

4 Elemente: Feuer, Wasser, Luft & Erde

↓

Thales v. Milet (6. Jhd v. Chr): MONIST

Heraklit: „pantha rhei"

Leukipp & Demokrit: <u>Atomos</u>

Atome & das Nichts

⇒ Suche nach Elementen warf die Frage nach GRUNDKRÄFTEN auf.

⇒ Gravitation: Ursache: Entstehung der Sterne, Galaxien etc. } makros. Größen

⇒ Elektr. Kraft

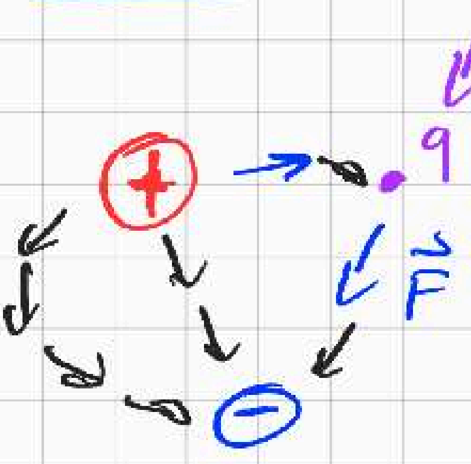
⇒ schwache WW } ganz kleine Skalen

⇒ starke WW } Atomkerne, β-Zerfall, ..

---

① • Wirkung des elektr. Feldes auf Probeladung

Ann: pos Ladung



$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

↓ elektr. Feldstärke: Vektorfeld

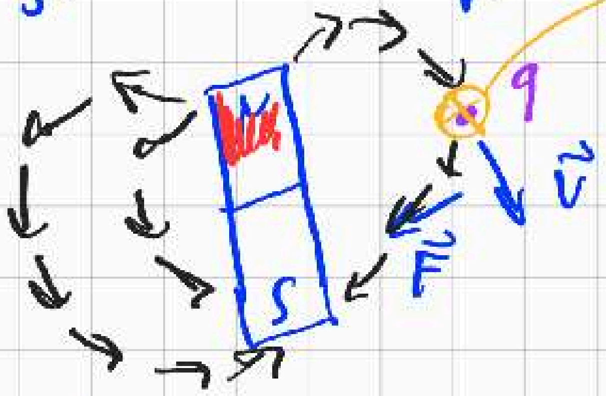
Einheit von $\vec{E}$: $\frac{N}{C} = \frac{N}{A \cdot s} = \frac{\overset{=J/m}{N} \cdot V}{\underset{J}{Ws}} =$

Ampere = Watt/Volt

$$= \frac{N\cdot V}{J} = \frac{\cancel{J}\cdot V}{\cancel{J}\cdot m} = \boxed{\frac{V}{m}}$$

---

② magnetische Kraft :



in Ebene hinein wenn Ladung positiv !

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Vektorfeld}}}{\vec{B}}$$

$\vec{F}$ ... Lorentzkraft im engen Sinn

$\vec{B}$ ... heißt magn. Flussdichte

Einheit : $\frac{Ns}{Cm}$ von vorher : $\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V\cdot s}{m^2}} = T \quad (\text{Tesla})$$

⇒ Zusammenführung beider Kräfte ergibt:

<u>Lorentzkraft im weiteren Sinn</u>

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

↓

Kraftvektor

- Beschreibung von Ladungen & Strömen

pos. Ladungen

neg. Ladungen

⟶ Welche Ladung finden wir in V?

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

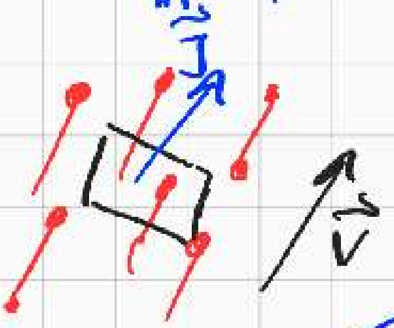
↓

elektr. Raumladungsdichte

Einheit: $\frac{C}{m^3}$

ρ hängt von Ort & Zeit ab.

Betrachten „fließende Ladungen"



$$\vec{J} = \boxed{?} \cdot \vec{v}$$

$$|\vec{J}| = \frac{I}{A}$$

elektr. Stromdichte

Ampere

Einheit : $\boxed{\frac{A}{m^2}}$

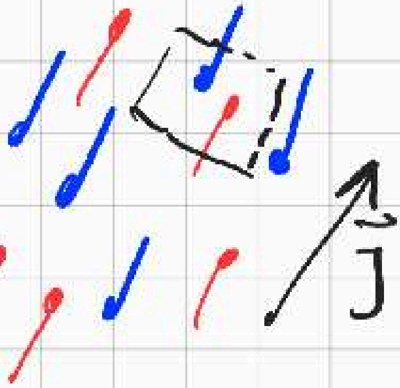
$\Rightarrow$ Einheit von $\boxed{?}$: $\frac{As}{m^3} \cdot \frac{m}{s}$

$$\Rightarrow \vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$$

$\downarrow$

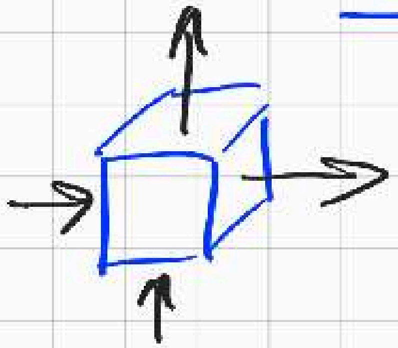
elektr. Raumladungsdichte

$\rho = 0$



$\vec{J}$ ... verdoppeln

Zusammenhang: Raumladungsdichte & Stromdichte



$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

„Quellendichte“ $\leftarrow$ = Divergenz des Feldes $\vec{J}$

$\operatorname{div} \vec{J}$

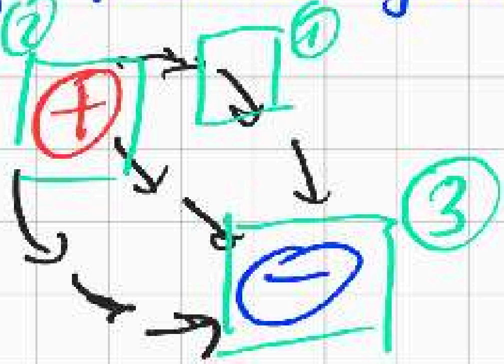
Bezug zur Raumladungsdichte:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$ „Kontinuitätsgleichung“

„Ladungen gehen nicht verloren“!

MAXWELL GLEICHUNGEN

1. Gauß'sche Gesetz für elektr. Felder



$\operatorname{div} \vec{E}$

- ① fließt genausoviel rein wie raus
  ② Linien fließen raus
  ③ Linien in den Würfel „reinfließen"

$$\underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{LS} = \underbrace{\text{const.} \cdot \rho}_{RS}$$

$\rho \rightarrow$ Raumladungsdichte

Einheit:

LS $\frac{V}{m^2}$

RS $\frac{C}{m^3}$

1. Maxwell

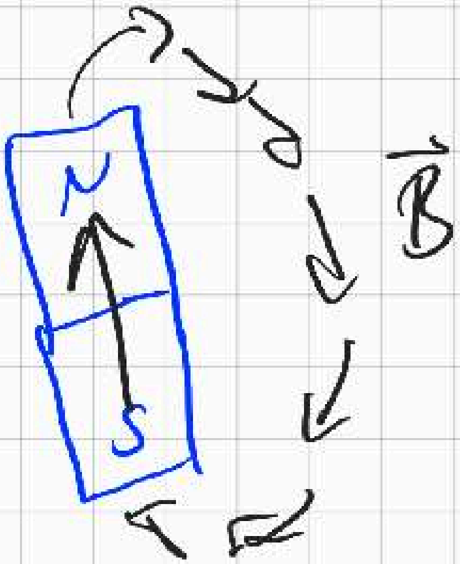
const. muss Naturkonstante sein

$$\boxed{\varepsilon_0 \cdot \operatorname{div} \vec{E} = \rho}$$

→ Gauß'sche Gesetz f. E-Feld

elektr. Feldkonstante $\approx 10^{-11} \frac{C}{Vm}$

Gauß'sche Gesetz für Magnetfelder:



$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

2. Maxwell'sche Gesetz

Es gibt keine magnetischen Ladungen

Es gibt keine magn. Monopole

Edyn

10. Dez. 2020

Recap:

elektr. Kraft: $\vec{F} = q\,\vec{E}$

magn. Kraft: $\vec{F} \quad q\,\vec{v} \times \vec{B}$

⇒ Kraftvektor auf Ladung:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Raumladungsdichte $\rho = \frac{Q}{V}$

→ Zusammenhang zur Stromladungsdichte $\vec{J}$

Kontinuitätsgleichung:

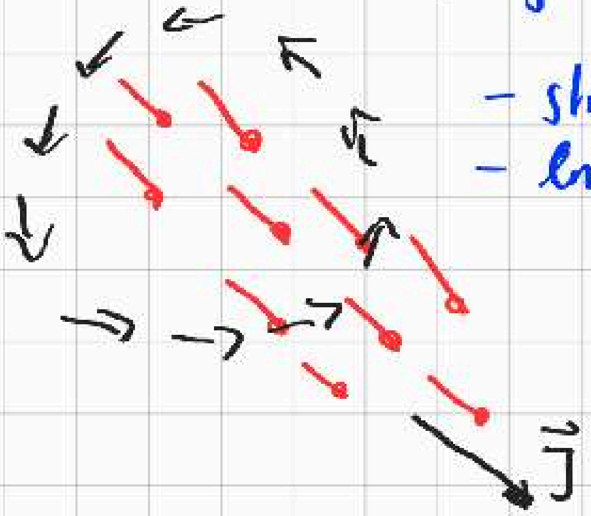
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

⇒ 1. Maxwell: $\boxed{\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho}$

⇒ 2. Maxwell: $\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$

• Durchflutungsgesetz

wie Ströme magn Felder erzeugen



- strömen aus Tiefe nach vorne
- entlang der Röhre eine Stromdichte $\vec{J}$

$$\underbrace{\mathrm{rot}\ \vec{B}}_{LS} = \underbrace{\mathrm{const}\cdot \vec{J}}_{RS}$$

Einheit LS: $\frac{T}{m}$

RS: $\frac{A}{m^2}$

} diese Einheiten passen nicht zusammen

⇒ Konstante muss Naturkonstante sein

$$\boxed{\mathrm{rot}\ \vec{B} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{magn. Feldkonstante}}}{\mu_0} \cdot \vec{J}}$$

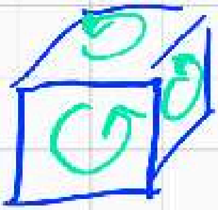
„Durchflutungsgesetz"

$$\approx 10^{-6}\ \frac{T}{m}\cdot\frac{m^2}{A} = \frac{N\overset{=\frac{1}{A}}{s}}{C\cancel{m^2}}\cdot\frac{\cancel{m^2}}{A} = \frac{N}{A^2}$$

⇒ sehr schwierig starke B-Felder zu erzeugen

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} \overset{???}{=} \mu_0 \vec{J}$$

$$\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}}_{=0} = \mu_0 \boxed{\mathrm{div}\,\vec{J}} \rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$



$LS : 0$

$RS : -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$ „zeitl. Ableitung der Raumladungsdichte =0"

⇒ Das kann nicht sein!

$$\Rightarrow \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\, \mathrm{div}\,\vec{J}$$

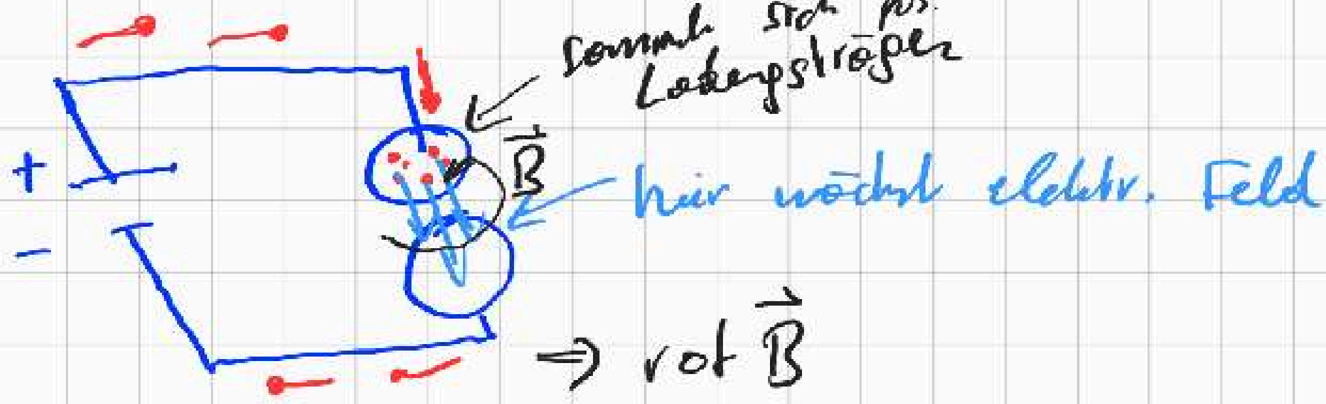
$$= -\mu_0 \underset{\downarrow \atop \mathrm{div}\,\vec{J}}{\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}}} \boxed{+\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}} \nearrow \rho = \varepsilon_0\, \mathrm{div}\,\vec{E}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\, \mathrm{div}\left(\vec{J} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{Verschiebungsstrom}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$$

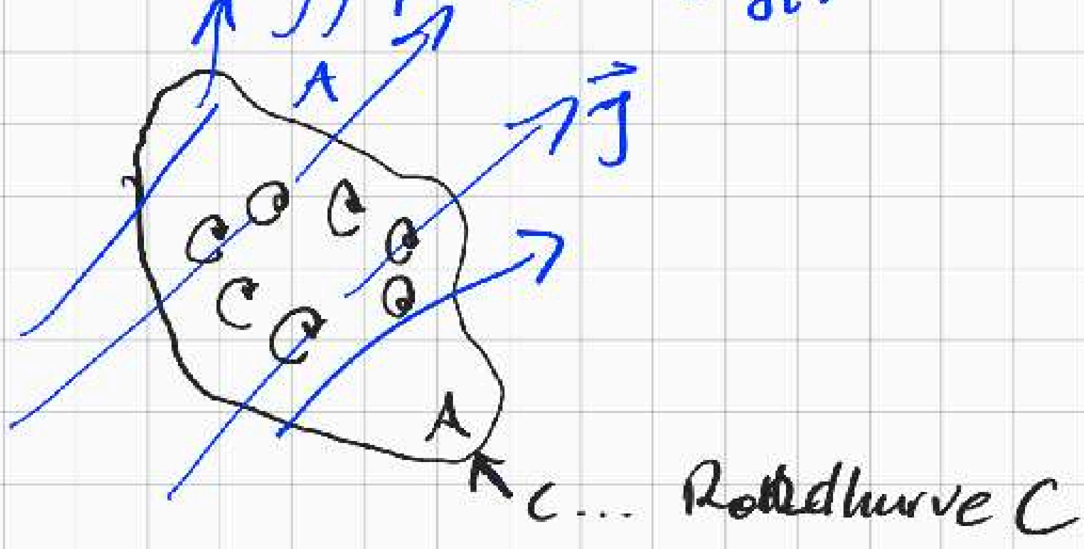
<u>4. Maxwell</u>

- Aufladung eines Plattenkondensators



- Woher „Durchflutungsgesetz"

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{B} = \iint_A \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{n}$$



Satz von Stokes:

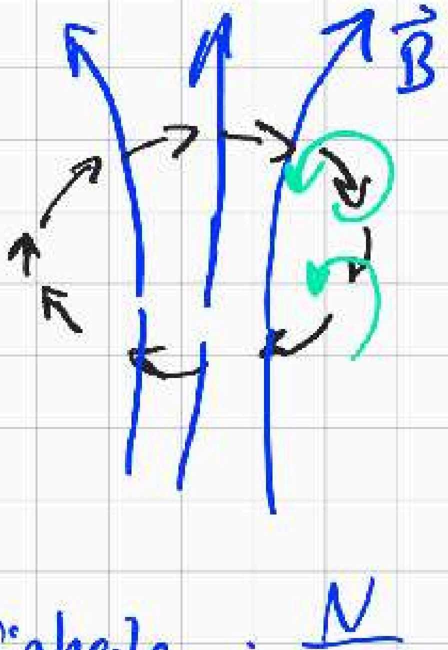
$$\updownarrow$$

$$\text{LS} \iint_A \text{rot}\,\vec{B} = \oint_C \vec{B}\, d\vec{s}$$

$$\text{RS} = \mu_0 \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Strom, der die Fläche } \underline{\text{DURCHFLUTET}}}}{I} + \ldots\ldots$$

• Induktionsgesetz (3. Maxwell)

= zeitl. veränderliches $\vec{B}$-Feld generiert $\vec{E}$-Feld



$$\text{rot}\,\vec{E} = -\text{const.}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\downarrow$

neg. Vz

⇒ **Dämpfung**

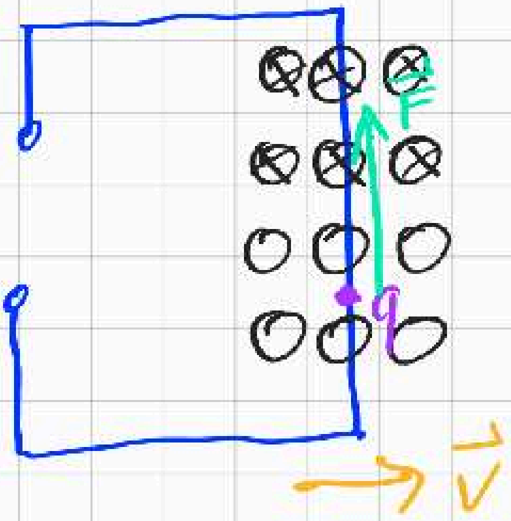
Einheiten: $\frac{N}{mC}$ LS

(RS) $\frac{N}{C \cdot m}$ (RS)

⇒ Konstante muss 1 sein

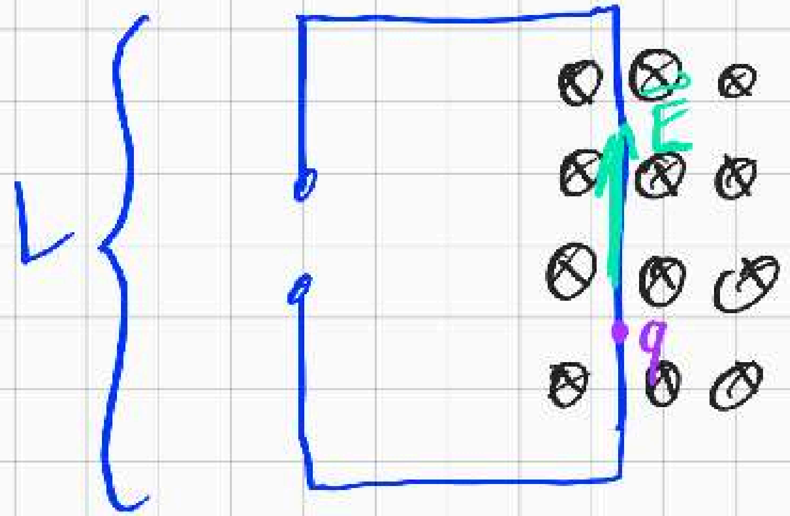
$$\Rightarrow \boxed{\text{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$ 3. Maxwell

Leiterschleife bewegt in einem festen Feld



$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Leiterschleife fest in veränderlichem B-Feld



$$\vec F = q \vec v \times \vec B$$

keine Lorentzkraft, da Leiter nicht bewegt

⇒ Es muss $\vec E$ Feld geben

⇒ erzeugt durch $\frac{\partial B}{\partial t}$

$$\vec F = q \boxed{\vec E} = \vec v \times \vec B$$

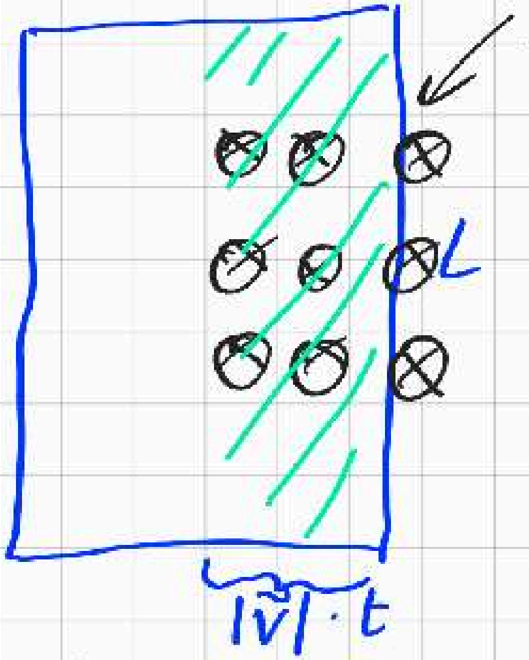
$$\underset{\text{Leiter schleife}}{\oint} \vec E \, d\vec s = \underset{\text{Fläche der Leiter-schleife}}{\iint} \text{rot}\, \vec E \, d\overset{\text{Flächennormal}}{\vec n}$$

(LS) $$\underbrace{L \cdot |\vec E|}_{\text{elektr. Feld im ||. Teil d. Schleif}} = \boxed{|\vec v| \cdot |\vec B| \cdot L}$$

RS $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{n} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\square} \vec{B}\, d\vec{n}$$

Leiterschleife ist ruhend → part. Ableitung rausziehen



B-Feld wird noch & noch eingeschaltet; und zwar mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$

RS: $\frac{\partial}{\partial t}\left(-|\vec{B}|\,|\vec{v}|\,t \cdot L\right)$

$$= \boxed{\text{const.}\ |\vec{B}|\,|\vec{v}|\,L}$$

→ const. muss 1 sein.

Maxwell Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &① \ \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho \\ &② \ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{aligned}\right\} \text{Anfangsbedingung}$$

$$\left.\begin{aligned} &③ \ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &④ \ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \end{aligned}\right\} \text{zeitl. Verändg}$$

⇒ Satz von DGL: Vollständiges DGL System

- Zusammenhang Lichtgeschw. c, ε_0, μ_0

Betrachte elektromagn. Welle, aber ohne Ladungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Keine Ladung
→ kein Strom

→ Lösung: Zusammenhg zw. c, ε_0, μ_0

$$\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}$$

Edyn. 15. Dez. 2020

Helmholtz Theorem

- $\vec{F}(x,y,z)$
- ein paar Dinge sind bekannt:

  1. $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{C}$
  2. $\text{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = D$
  3. Normalkomponente von $\vec{F}$ entlang einer geschlossenen Oberfläche S: $\hat{n} \cdot \vec{F}\big|_S = g$

$\Rightarrow$ Wenn diese 3 Dinge bekannt, dann ist $\vec{F}$ bestimmt.

- 1-dim. Pendant: $\dfrac{dx}{dt} = \vec{v}$

  Ausgangspunkt $x(0) = x_0$

  $\Rightarrow$ Denn $x(t)$ vollständig bestimmt.

- Maxwell Gleichungen : Integral - vs. diff. Form
  - differenzielle Form nützlich, wenn man E und B an best. Orten bestimmen möchte
  - Integralform nützlich um Felder in Raumbereich zu berechnen (symm. Probleme: Kugel, Zylinder etc.)
  - diff. Form vor allem bei numerischen Problemen

⇒ Umwandlung mittels Sätzen von Gauß & Stokes!

- Gauß Integraltheorem

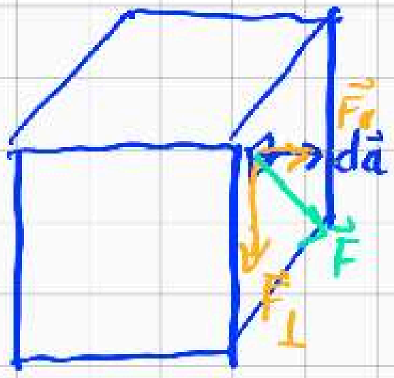
$$\int_V \underset{\text{(LS)}}{(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})}\,dv = \oint_{\underline{\underline{A}}} \underset{\text{(RS)}}{\vec{F}\cdot d\vec{a}}$$

(RS): - A steht für Fläche, die irgendein Volumen V einschließt
- Fläche muss geschlossen sein

- $\vec{F}$ ist Vektorfeld; bei Maxwell: $\vec{E}$ od. $\vec{B}$
- $d\vec{a}$ ... infinitesimales Flächenelement

⇒ Bedeutung des Skalarprodukts $\vec{F} \cdot d\vec{a}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$$

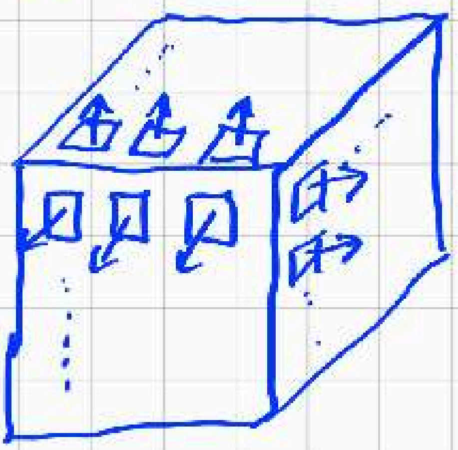


Vektor $d\vec{a}$ steht normal auf Fläche

$$\vec{F}_\perp \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\vec{F}_\parallel \cdot d\vec{a} \neq 0$$

- Skalarprodukt pickt den Teil des Vektorfeldes heraus, der ∥ zu $d\vec{a}$ steht.
- Alle anderen Richtungen werden eliminiert.



Die RS des Gauß Theorems summiert alle Anteile des Vektorfeldes $\vec{F}$ auf, die aus der Fläche austreten.

Das nennt man auch Fluss Φ

$$\Phi = \oint_A \vec{F} \cdot d\vec{a}$$

↓

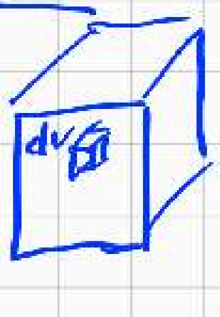
Φ misst wieviel vom Feld $\vec{F}$ herausfließt

Im Fall d. Maxwell Glg:

Φ_e ... elektr. Fluss durch A

Φ_m ... magn. Fluss —"—

(RS) misst des gesamten Fluss des Feldes durch die Oberfläche.



(LS) $$\int (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \, dv$$

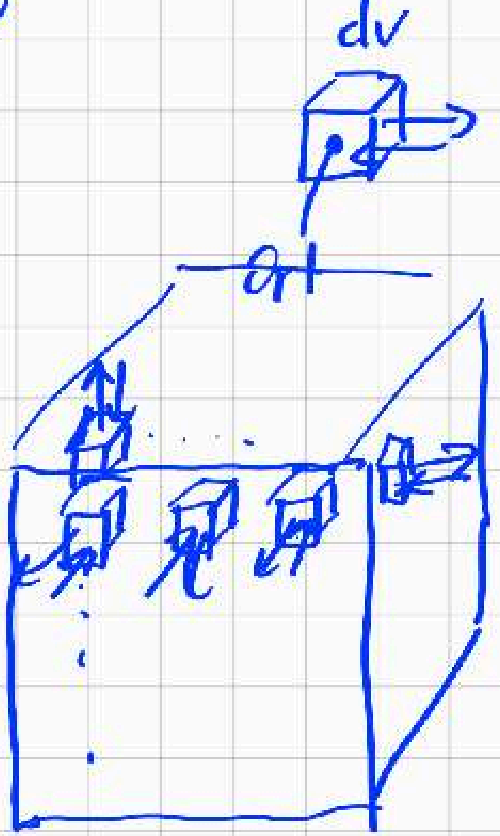
↓

- betrachten jenes Volumen das von A eingeschlossen wird
- dv ... infinit. Volumselement
- Ortsableitung von $\vec{F}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} > 0$ ... Quelle .... Vektorfeld fließt raus

$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} < 0$ ... Senke .... Vektorfeld fließt rein

$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$



LS entspricht Summe aller Quellen & Senken innerhalb V

RS Gesamtfluss des Feldes durch die Oberfläche von V

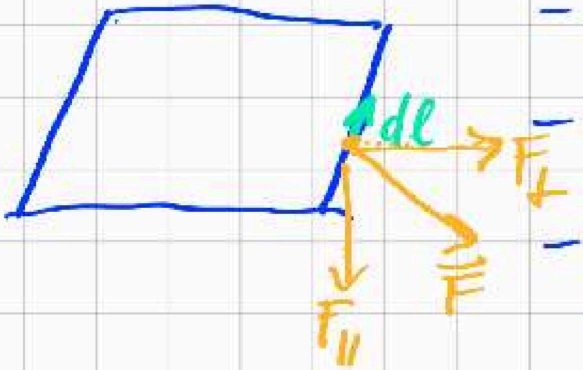
⇒ Gauß Theorem besagt, dass Σ Quellen & Senken innerhalb von V dem Gesamtfluß des Vektorfeldes durch dessen Oberfläche entspricht.

• Stokes Integraltheorem

$$\int_A (\vec\nabla\times\vec F)\,d\vec a = \oint_L \vec F\cdot d\vec l$$

LS RS

RS



- L... Linie im Raum
- L muss geschlossen sein
- $d\vec l$ .. infinit. Stück entlang Schleife

- Skalarprodukt eliminiert Normalenteil
- Es wird nur der Anteil von $\vec F$ berücksichtigt, der entlang L verläuft.

⇒ RS misst wieviel von $\vec F$ entlang der Linie L verläuft.

⇒ Fall elektr. Feld: $\boxed{U_e=\oint_L \vec E\cdot dl}$

magn. Feld: $U_m=\oint_L \vec B\cdot dl$

LS

$$\int_A (\vec{\nabla}\times\vec{F})\, d\vec{a}$$

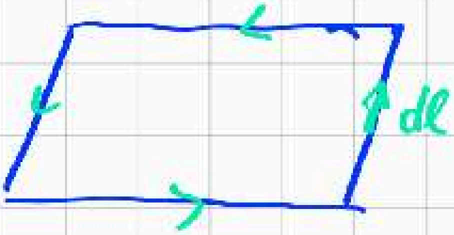
↓

- jene Fläche, die von L umschlossen wird
- $(\vec{\nabla}\times\vec{F})$ ... gibt Vektor, der ⊥ auf $\vec{F}$ steht
- gibt an wie stark das Feld $\vec{F}$ um einen Ort „rotiert"
- Skalarprodukt pickt nur ∥- Anteil heraus: hier von $(\vec{\nabla}\times\vec{F})$

⟹ Rotieren des Vektorfeldes werden aufsummiert

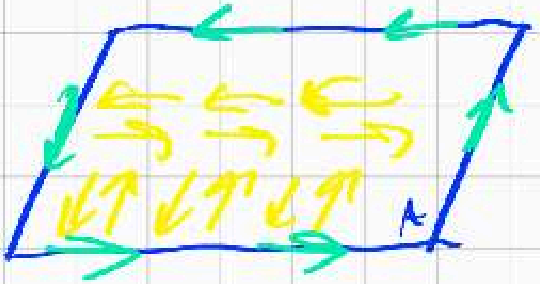
LS

RS



Betrachtet die „Rotation" des Felds um die Fläche A

→ Stokes Theorem:

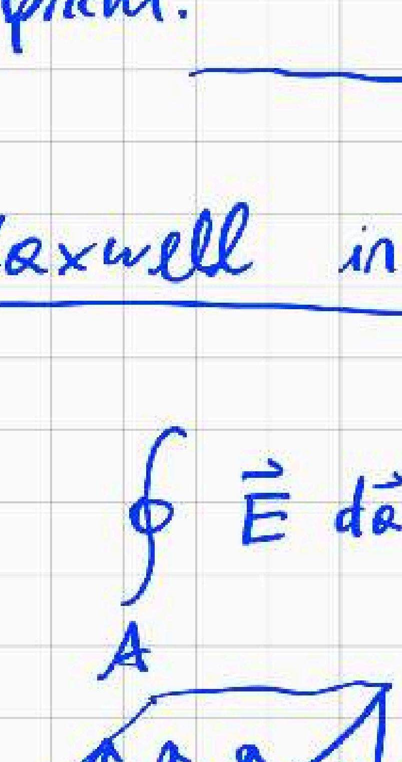


Besagt, dass die gesamte Rotation von $\vec{F}$ innerhalb von A der Rotation eines Feldes $\vec{F}$ entlang des Randes L dieser Fläche entspricht.

• Maxwell in Integralform

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

$$\oint_A \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{\boxed{Q}}{\varepsilon_0}$$



Summe aller eingeschloss. Ladungen innerhalb einer Oberfläche A

LS: misst wieviel vom elektr. Feld aus der Oberfläche austritt oder eintritt

⇒ elektr. Fluss durch die Oberfläche (Φ_e)

⇒ 1. Maxwell besagt, dass der elektr. Fluss durch A der Ladung Q entspricht die von A eingeschlossen wird.

- Umwandeln in diff Form

⇒ Anwendung Gauß Theorem:

① $$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,dv = \oint_A \vec{E}\,d\vec{o}$$

② $$Q = \int_V \rho\,dv$$

$$\Rightarrow \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dv$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$\vec{\nabla}\vec{E} > 0$ ... pos. Ladgsd.

$\vec{\nabla}\vec{E} < 0$ ... neg. Ladgsd.

- 2. Maxwell in Integralform

$$\oint_A \vec{B}\,d\vec{o} = 0$$

Der magn. Fluss Φ_m durch A = 0.

- Umwandlg in diff. Form

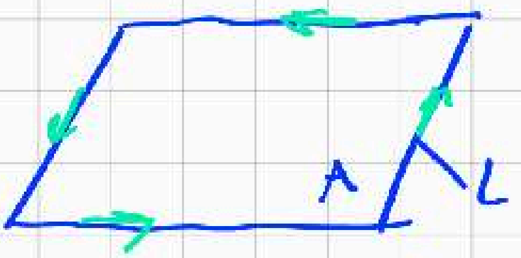
→ Gauss Theorem

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$$

• 3. Maxwell in Integralform

$$\underbrace{\oint_L \vec{E}\, d\vec{l}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_A \vec{B}\, d\vec{a}}}$$

„Induktions" gesetz



Bestimmt den Anteil von $\vec{E}$ der entlang L rotiert.

entspricht magn. Fluss durch A

zeitl. Änderung des magn. Flusses:

$$\underbrace{U_e = -\frac{\partial \phi_m}{\partial t}}$$

zeitl. Änderung des magn. Flusses verursacht elektr. Spannung.

- Umwandlung in diff Form

$\Rightarrow$ Anwendung von Stokes: $\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, d\vec{a} = $

$= \oint_L \vec{E}\, d\vec{l}$

$$\Rightarrow \int_V \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) d\vec{a} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{B}\, d\vec{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

• 4. Maxwell in Integralform

$$\underbrace{\oint_L \vec{B}\, d\vec{l}}_{} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overbrace{\int_A \vec{E}\, d\vec{a}}^{=\ \text{elektr. Fluss durch } A}$$

elektr. Strom: Ladungen entlang Leiter

$$j = \frac{I}{A}$$

$$I = \int_A j\, d\vec{a}$$

Linienintegral des magn. Flusses $\vec{B}$

= magn. Spannung U_m

- Auf rechter Seite: 2 Beiträge:
  - Strom I
  - zeitl. Veränderung des Flusses durch A

- D.h: Magnetische Spannung wird zum einen durch elektr. Ströme und zum anderen durch die sie verändernden elektr. Felder erzeugt.

Stokes $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

4. Maxw. diff. Form

- **Anmerkung:** zu Übung Maxwell im Vakuum
$\Rightarrow$ Wellenglg.

$$\boxed{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}}$$

Edyn 17.12.2020

• Diracs Maxwell Gleichungen (siehe Skript)

- im Vakuum: Mxw. Glg. symmetrisch
- erfordern Existenz magn. Ladungen
- neu:
  - ρ_m ... magn. Ladungsdichte
  - $\vec{J}_m$ ... magn. Stromdichte
- Folgerung: Quantisierung elektr. Ladungen
- GUT Theorie sagt Existenz magn. Monopole voraus
- Abgeschätzte Energie $\underline{m_g \sim 10^{16}\,\mathrm{GeV}}$
- kurz nach Urknall: Energien ausreichend → könnten bis heute nachweisbar sein.

• Elektrische Eigenschaften von Materie

- Einbringen von Medium in elektr. Feld
- zum Beispiel zwischen Kondensatorplatten

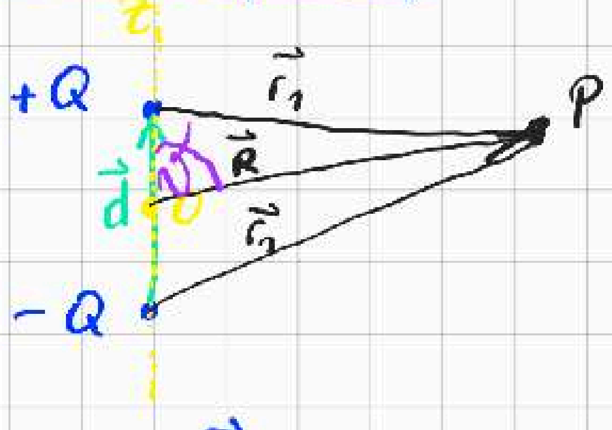
- DIELEKTRIKA:

- meistens Festkörper
- praktische keine Leitfähigkeit (Holz, Glas, Porzellan)
- Anwesenheit verändert elektr. Feld
- molekulare Eigenschaften spielen wesentliche Rolle

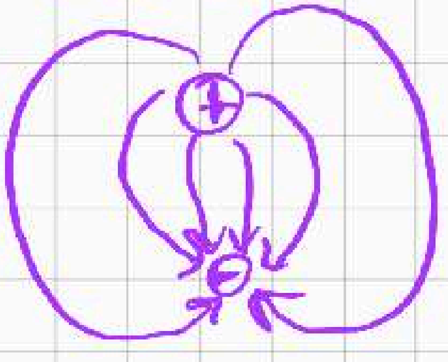
↓

vor allem können Moleküle Dipole sein

• Elektrische Dipole



- betrachten resultierendes Feld in P



$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{\vec{d}}{2}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{\vec{d}}{2}$$

- **Einschub**: Elektr. Potenzial einer **Punktladung**

„Coulomb Potenzial"

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{|\vec{r}|} \qquad \propto \frac{1}{r^2}$$

Das dazugehörige $\vec{E}$-Feld: $\boxed{\vec{E}} = -\text{grad}\,\phi$

- **Definition:** elektr. Dipolmoment

$$\boxed{\vec{p_e} = Q\cdot\vec{d}}$$

- **Potenzial beim Punkt P** („Übung")

$$\phi(\vec{R}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left[\frac{1}{|\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}|} - \frac{1}{|R+\frac{\vec{d}}{2}|}\right]}$$

Für den Fall $|\vec{R}| \gg |\vec{d}|$

Reihenentwicklung und nach dem ersten Glied abbrechen

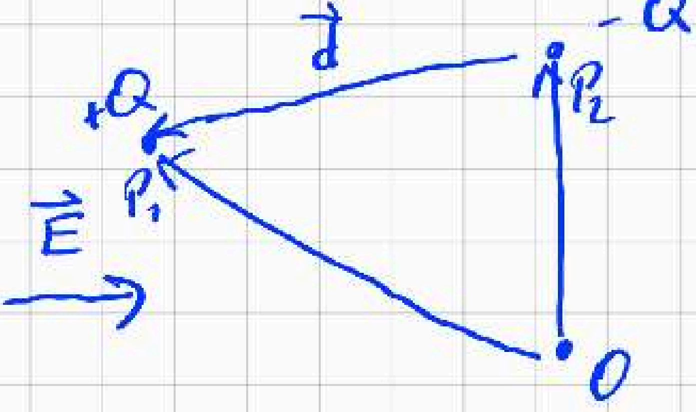
$$\phi(\vec{R}) \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\boxed{\vec{d}\,\vec{R}}}{R^3} \rightarrow \text{umformuliert mit „}\cos\vartheta\text{"}$$

$$\phi(\vec R) \simeq \frac{\vec p_e \cdot \vec R}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{p_e \cdot \cancel{R} \cdot \cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 R^{\cancel{3}2}}$$

$$\boxed{\phi \propto \frac{1}{R^2}} \Rightarrow \boxed{\vec E \propto \frac{1}{R^3}}$$

- Elektr. Feld eines Dipols fällt stärker ab ($\frac{1}{r^3}$) im Vergleich zu Punktladung
&
hängt von Winkel ϑ ab.

- Legen ein äußeres Feld an Dipol an:



$\vec d = \vec r_1 - \vec r_2$

- Dipolmoment entlang d.
- Was passiert?
- pos. Ladung möchte nach „rechts" & neg. Ladung nach „links"

$\Rightarrow$ Drehmoment

$$\vec{N} = \vec{r}_1 \times (Q \cdot \vec{E}) + \underbrace{\vec{r}_2 \times (-Q \cdot \vec{E})}_{\text{Drehmoment bzgl Ladung } -Q}$$

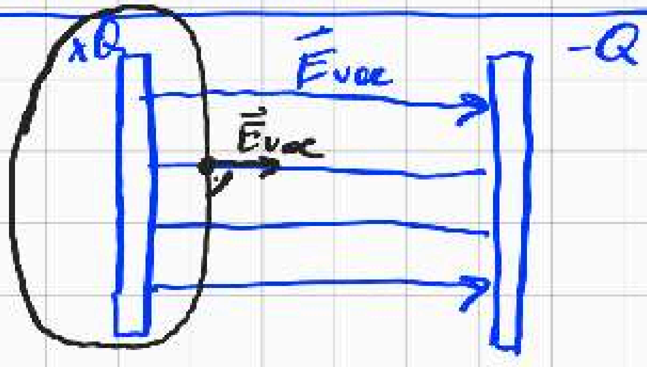
$$\vec{N} = \underbrace{Q\,\underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{\vec{d}}}_{\vec{p}_e} \times \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{N} = \vec{p}_e \times \vec{E}}$$

Drehmoment auf Dipol in äußeren Feld

⇒ Molekularen Dipole richten sich bei Anwesenheit äußeren Feldes in dessen Richtung aus.

- Plattenkondensator im Vakuum



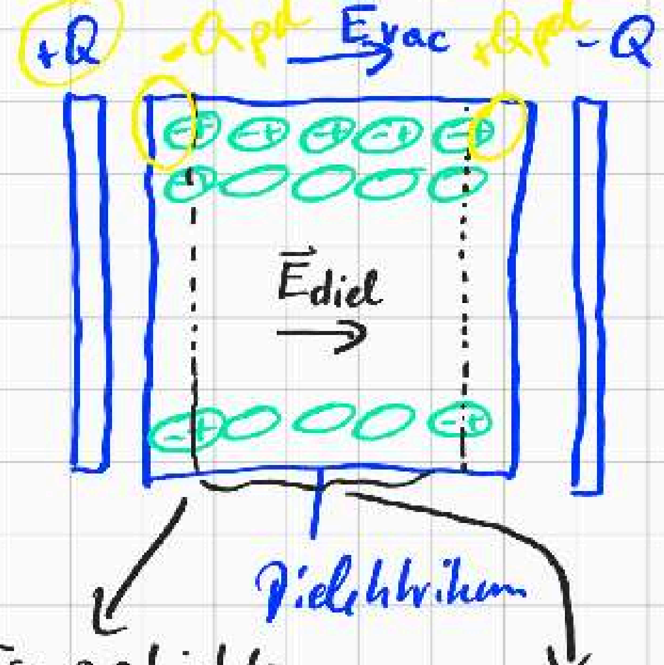
- denken uns geschlossene Fläche um Platte
- $\phi_e = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ Fluss aus Fläche raus
- $\phi_e = A \cdot E_{vac}$

$\Rightarrow E_{vac} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$

- Definition: Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{Q}{A}$

$$\boxed{|\vec{E}_{vac}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

• Plattenkondensator mit Dielektrikum



- idealisierte Darstellung
- vollständige Ausrichtung nicht möglich (Temp, Festkörper)

- Grenzschichten... Polarisationsschichten ($\pm Q_{pol}$)
- bilden „Kondensator in Kondensator"
- Im Inneren des Dielektrikums ergibt sich dann $\vec{E}_{diel}$.

- Polarisation des Dielektrikums pro Volumseinheit

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{V} \vec{p_e}}$$

Ann: homogenes Material & Dipole vollständig ausgerichtet.

$$\boxed{|\vec{P}| = N \cdot |\vec{p_e}| = N \cdot q \cdot d}$$

Anzahl der Moleküle pro Volumen

$$Q_{pol} = \underbrace{\overset{\text{Plattenfläche}}{A} \cdot d}_{\text{Volumen}} \cdot N \cdot q$$

Polarisations= ladung in Grenzschicht

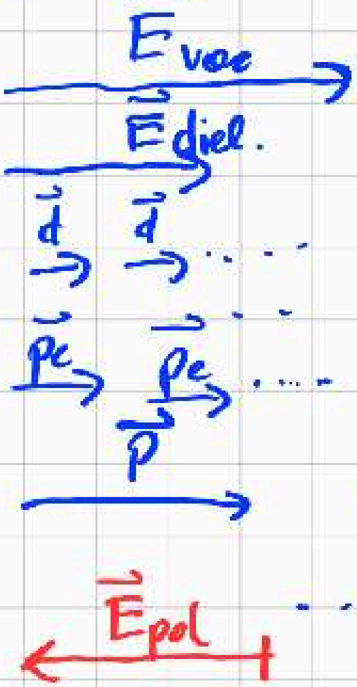
- **Polarisationsflächenladungsdichte**

$$\boxed{\sigma_{pol} = N \cdot q \cdot d}$$

analog zum Vakuumkondensator

$$|\vec{E}_{pol}| = \frac{\sigma_{pol}}{\varepsilon_0} = \frac{|\vec{P}|}{\varepsilon_0}$$

Überlegen der Richtungen



.... Polarisation pro Volumeneinheit

... Polarisationsfeld

- $\vec{E}_{pol}$ ist dem Vektor der Gesamtpolarisation pro Volumeneinheit ($\vec{P}$) entgegengerichtet
- Ursprüngliches Feld $\vec{E}_{vac}$ wird abgeschwächt.

$$\boxed{\vec{E}_{pol} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}}$$

Feldstärke im Dielektrikum:

$$\boxed{\vec{E}_{diel} = \vec{E}_{vac} + \vec{E}_{pol} = \vec{E}_{vac} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}}$$

- Polarisation im Dielektrikum

-2 Fälle: + Orientierungspolarisation
(Ausrichtung vorh. Dipole)
+ Verschiebungspolarisation

↓

Vorstellung: pos. Molekülkern & Elektronenhülle stoßen sich ab ⇒ Dipol

→ tritt bei unpolaren Molekülen auf.

$$\vec{p}_e = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Polarisierbarkeit}}}{\alpha} \cdot \vec{E}_{diel}$$

⟹ Gesamtpolarisation: $\vec{P} = N \cdot \vec{p}_e = \boxed{N \cdot \alpha}\, \vec{E}_{diel}$

$$= \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}_{diel}$$

↓

dielektrische Suszeptibilität

⟹ Folgerung:

$$\vec{E}_{diel} = \vec{E}_{vac} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{diel} = \vec{E}_{vac} - \chi_e \vec{E}_{diel}$$

$$\vec{E}_{diel} = \frac{\vec{E}_{vac}}{\boxed{1+\chi_e}} = \frac{\vec{E}_{vac}}{\boxed{\varepsilon_r}}$$

↓

ε_r ... rel. Dielektrizitätskonstante

ε_r ... gibt an um welchen Faktor das Feld abgeschwächt wird im Dielektrikum.

↓

materialabhängig

EDyn 12.1.2021

- **Relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r**

Quarzglas	3,75	Festkörper
Porzellan	6 - 7	
Cu - Oxid	18	
Ti - Oxid (Keramik)	80	
Benzol	2,3	Flüssigkeiten
Ethyl Alkohol	25,8	
Wasser	81	
Wasserstoff	1,000264	Gase
Luft	1,000576	

- Wichtig: Werte sind T-abhängig & Frequenz-abhängig

- **Bedeutung für Kondensator** (Übung)

  - Spannung $U = E_{diel} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Abstand d. Platten}}}{d}$

- $C = \frac{Q}{U}$ $\Rightarrow$ Kapazität wird zunehmen

↓

Einheit: **Farad**

- weitere Beziehung: $Q = \varepsilon_0 \cdot E \cdot A$

↙

Gauss: $Q = \int_A \vec{E}\, d\vec{A} = \varepsilon_0 \cdot E \cdot A$

$$F = \frac{1}{2} E \cdot Q$$

• Freie Ladungen und dielektr. Verschiebung

- Betrachten: elektr. Feld, in das Medium eingebracht wird

- „Freie Ladungen"

↓

Ladungen auf den Kondensatorplatten, nicht die Polarisationsladungen

- Für den Vakuumkondensator :
  (Maxwell)

„freie Ladungen"

$$\operatorname{div} \vec{E}_{vac} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- **Definition: dielektr. Verschiebung:**

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vac}}$$

$\vec{D}$ … „Repräsentant des Vakuumfeldes"

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

Dichte der „freien Ladungen"

Freie Ladungen sind Quellen der dielekt. Verschiebung.

- $\vec{E}_{diel} = \vec{E} = \frac{\vec{E}_{vac}}{\varepsilon_r}$

$\vec{D}$ bleibt unverändert

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_{vac} = \underbrace{\varepsilon_0 \varepsilon_r}_{\varepsilon} \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$ „Materialgleichung"

Dielektrizitätskonstante

- Wozu macht man das?
  - ⇒ Materialeigenschaften werden verschoben von Maxwell-DGL zu einfache Materialgleichungen
- In Maxwell Gleichungen bleiben „freie Ladungen"
- Vorteil: Polarisationsladungen treten nicht mehr auf. (implizit in ε)

• Betrachten Fall: $\rho = 0$ „keine freie Ladungen"

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = 0$$ D-Feld ist Quellfrei

$$\operatorname{div} (\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}) = 0$$

- ε_r … im Allgemeinen Ortsabhängig
  (z.B: inhomogene Medien)

Produkt $\Rightarrow$ regel

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \operatorname{div}\vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} \underbrace{\operatorname{grad} \varepsilon_r}_{\text{weil ortsabhängig}} = 0$$

$\Rightarrow$ damit im Allg. $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$

dort wo
Polarisations-
ladungen.
$E \neq 0$

- Es gibt im E-Feld Orte wo Feldlinien entspringen.
- Das ist genau dort wo sich Polarisationsladungen befinden.

an Grenzflächen

- Bedingungen an Grenzflächen

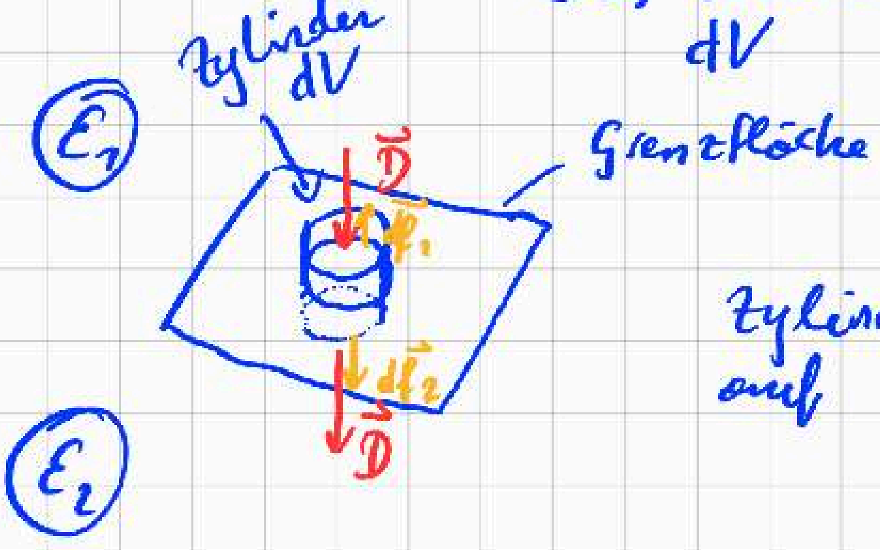
a) Feld $\perp$ auf Grenzfläche

Feld tritt senkrecht zur Grenzfläche durch

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \Rightarrow \oiint \vec{D}\, df = 0$$

↓

Oberflächenintegral über den Rand eines Volumens dV



Zylinder sitzt symmetrisch auf Grenzfläche

- $d\vec{f}_1 = -d\vec{f}_2$
- Es muss gelten:

$$\vec{D}_{\perp 1}\, d\vec{f}_1 + \vec{D}_{\perp 2} \underbrace{d\vec{f}_2}_{-d\vec{f}_1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D}_{\perp 2} = \vec{D}_{\perp 1}}$$

Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung durch die Grenzfläche hindurch ist stetig.

- Was bedeutet das für E-Feld?

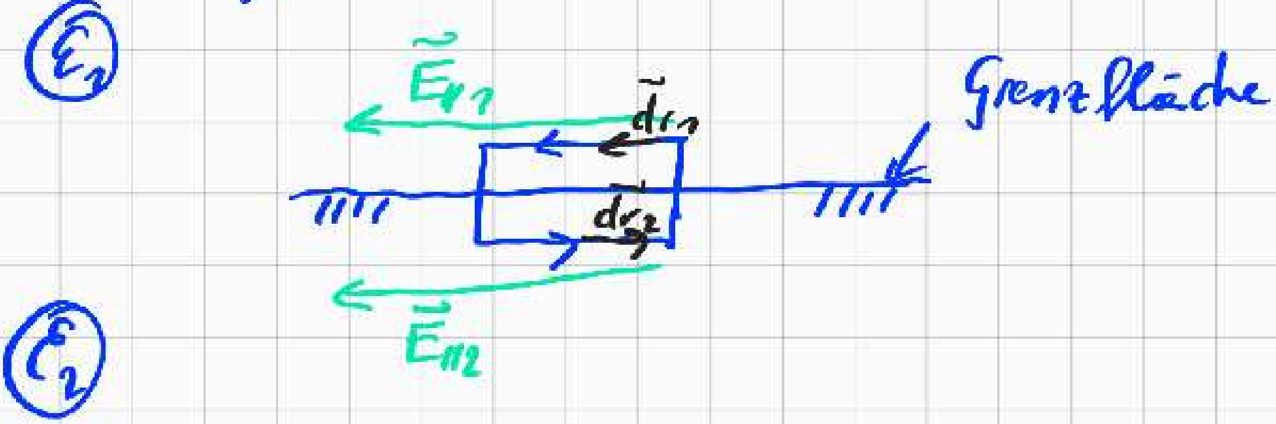
$$\varepsilon_2 \vec{E}_{\perp 2} = \varepsilon_1 \vec{E}_{\perp 1}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}_{\perp 2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \vec{E}_{\perp 1}}$$

E-Feld ändert sich!

b) Feld parallel zur Grenzfläche:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{r} = 0$$



$$\vec{E}_{\parallel 1} \, d\vec{r}_1 + \vec{E}_{\parallel 2} \, \underbrace{d\vec{r}_2}_{-d\vec{r}_1} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}_{\parallel 2} = \vec{E}_{\parallel 1}}$$

Die Parallelkomponente des elektrischen Feldes ist stetig (längs einer Grenzfläche).

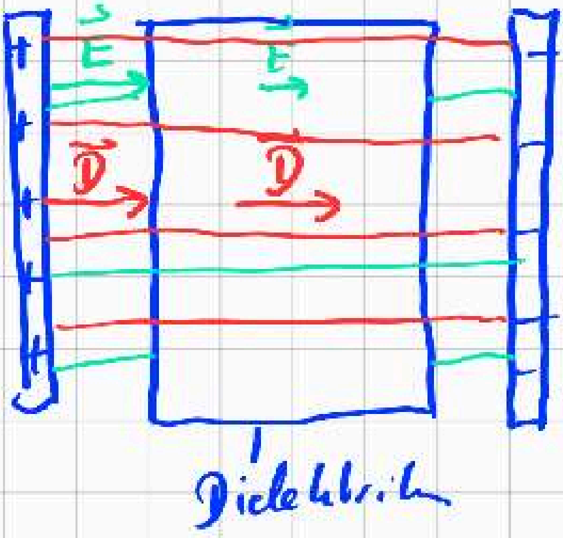
Materialgleichung: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\Rightarrow \frac{\vec{D}_{\parallel 2}}{\varepsilon_2} = \frac{\vec{D}_{\parallel 1}}{\varepsilon_1}$$

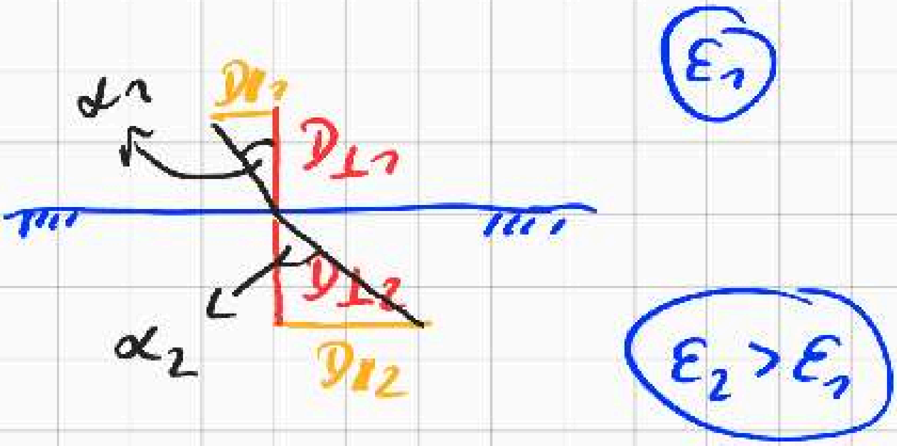
$$\Rightarrow \boxed{\vec{D}_{\parallel 2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \vec{D}_{\parallel 1}}$$

D-Feld ändert sich.

• Beispiel Plattenkondensator



c) Feld schräg zur Grenzfläche

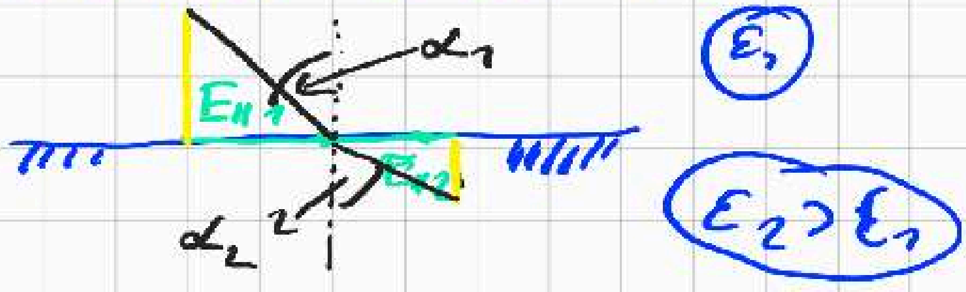


Es gibt eine Brechung der Feldlinien

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha_1 &= \frac{D_{\parallel 1}}{D_{\perp 1}} \\ \tan\alpha_2 &= \frac{D_{\parallel 2}}{D_{\perp 2}} \end{aligned}\right\} \boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}} = \frac{D_{\parallel 1}/\cancel{D_{\perp 1}}}{D_{\parallel 2}/\cancel{D_{\perp 2}}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

„Brechungsgesetz der D-Linien"

- Nun betrachten wir E-Linien:



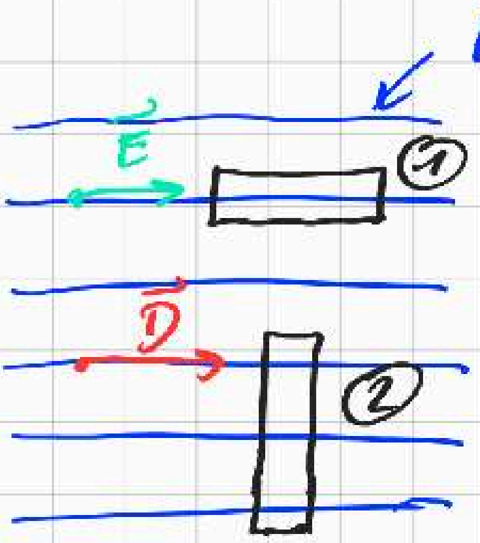
Bei E-Linien ist Parallelkomponente stetig. Normalkomponente ist unterschiedlich.

aufgrund Stetigkeit

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha_1 &= \frac{E_{\parallel 1}}{E_{\perp 1}} \\ \tan\alpha_2 &= \frac{E_{\parallel 2}}{E_{\perp 2}} \end{aligned}\right\} \frac{\cancel{E_{\parallel 1}}/E_{\perp 1}}{\cancel{E_{\parallel 2}}/E_{\perp 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$\Rightarrow$ D- & E-Linien werden im gleichen Maß gebrochen.

- Messung von E & D



① Messung der E-Felder

② aufgrund Stetigkeit der $\perp$-Vektoren des D-Feldes

$\Rightarrow$ D-Feld bestimmt.

EDyn

14.1.2021

• Makroskopisches Magnetfeld (Skript 2.4.2)

„ähnlich zur dielektr. Verschiebung D"

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}}$$

magn. Flussdichte

magn. Feldstärke

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

Permeabilitätszahl

„beschreibt Material-eigenschaften"

Permeabilität

Analogien:

freie Ladungsdichte ≙ Stromdichte (d. freien Ladungen): $\vec{J}$

Polarisationsfeld ≙ Magnetisierung $\vec{M}$

• Maxwell Gleichungen in Materie

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho} \text{ freie Ladungen}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

„wie gehabt"

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

— " —

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}}$$

freie Ströme

• Coulombsches Gesetz (Skript 3.1)

- Kraft zw. 2 Punktladungen
- Elektrostatisches Feld ergibt sich als Grenzfall, in dem Testladung gegen Null geht.

• Gesetz von Biot-Savart (Skript 3.2) / Eichtransformationen:

„ermöglicht bei beliebig geformten dünnen Stromleitern die dazugehörigen Magnetfelder zu berechnen"

$\text{div}\,\vec{B} = 0$

Vektoranalysis: $\text{div rot}\,\vec{B} = 0$ immer Null

div

Ansatz: $\boxed{\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}}$

↓

Vektorfeld

Damit ist sichergestellt dass Maxwell Glg erfüllt ist:

$$\text{div}\,\vec{B} = \underbrace{\text{div rot}\,\vec{A}}_{0} \quad ✓$$

$\vec{A}$ .... Vektorpotenzial in Analogie zur Elektrostatik:

↓

$$\underline{\vec{E} = -\text{grad}\,\phi}$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi \text{ ... Skalar (1-dim)} \\ \vec{A} \text{ ... Vektorfeld (3-dim)} \end{array}\right\} \underbrace{\text{4er - Potential}}$$

↓

Ausgangspunkt für Einsteins SRT

- Eindeutigkeit (oder Mehrdeutigkeit) des Vektorpotentials $\vec{A}$:

Bei vorgegebenen B-Feld soll $\vec{A}$ ein Vektor=potenttal sein (d.h: $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$) und neben $\vec{A}$ soll auch ein $\vec{A}'$ existieren von $\vec{B}$.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\, f(\vec{r}) + \text{const.}$$

$\Rightarrow$ Bilden Rotation von $\vec{A}'$: $\boxed{\text{rot}\,\vec{A}' = \text{rot}\,\vec{A}}$

weil rot grd f immer Null

$\Rightarrow$ Es gibt breite Palette von Möglichkeiten um $\vec{A}$ zu transformieren, sodass dann das richtige $\vec{B}$ rauskommt.

$\Rightarrow$ $\vec{A}$ ist mehrdeutig.

$\Rightarrow$ Solche Transformationen von Potenzialen, wo sich dabei physikalisch nichts ändert, nennt man EICHTRANSFORMATIONEN.

- Eichtransformationen spielen zentrale Rolle in der Feldtheorie.

- Unter Eichtransformationen bleibt physikalische Realität unverändert (<u>invariant</u>)

- Invarianz unter Eichtransformation ist entsprechend zur Erhaltung der Ladung.

- <u>Berechnung des Magnetfeldes einer vorgegebenen Stromverteilung:</u>

$$\begin{tikzcd} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \arrow[d] \\ \text{rot } \vec{A} \end{tikzcd}$$

Durchflutungsgesetz

$$\Rightarrow \underbrace{\text{rot rot}}_{\downarrow} \vec{A} - \mu_0 \vec{J}$$

① Vektoranalysis: „grad div − Δ"

② Umeichung, sodass $\text{div } \vec{A} = 0$

$\Rightarrow$ Derartige Eichung nennt man „Coulomb-Eichung"

⇒ Folgerung:

Analog zur Elektrostatik:

↓

Poisson Gleichung

$$\begin{tikzcd} \boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}} \arrow[r, leftrightarrow, bend right, "\text{Analogie}"'] & \boxed{\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \end{tikzcd}$$

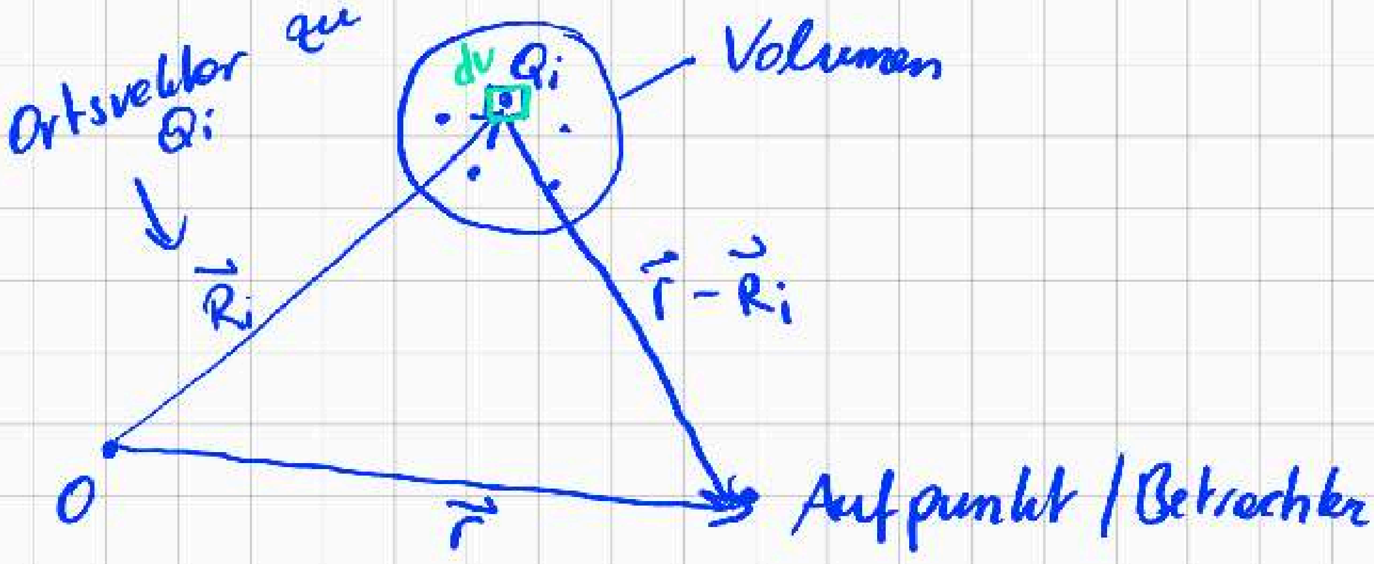
- Wichtig: $\vec{A}$ ist Vektorfeld, hingegen ϕ ist Skalarfeld

- Analogien:

$$\phi \rightarrow \vec{A};$$
$$\rho \rightarrow \vec{J};$$
$$\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow \mu_0$$

- Lösung der Poisson-Gleichung (Übung)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{V} \frac{Q_i}{|\underbrace{\vec{r} - \vec{R}_i}|}$$



⇒ Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilung:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{R})\,dv}{\underbrace{|\vec{r} - \vec{R}|}}}$$

Lösung der Poisson Gleichung

Abstand zw. Volumenelement & Aufpunkt

⇒ Damit erhält man analog die Lösung für ΔA:

⇒ Ersetzungen: $\phi \to A_i$

$\rho \to \vec{J}_i$

$1/\varepsilon_0 \to \mu_0$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{R})\,dv}{|\vec{r}-\vec{R}|}$$

↓

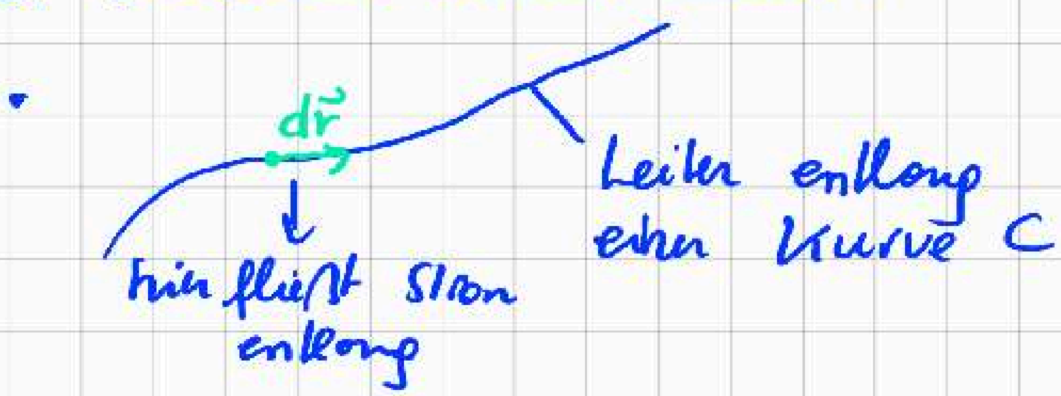
Vektorpotenzial, aber wir möchten $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}}$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \underbrace{\text{rot}\left(\frac{\vec{J}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}\right)}_{\text{Berechnung etwas aufwändig}} dv$$

$$\rightarrow \text{rot}\left(\frac{\vec{J}}{|\vec{r}-\vec{R}|}\right) = \frac{\vec{J}(\vec{R})\times(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}$$

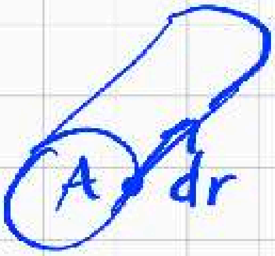
⇒ Einsetzen & Berechnen dünnen Leiter:



$$\rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\, \overset{\overset{\text{Strom}}{\downarrow}}{I} \int_C \frac{(\vec{r}-\vec{R}) \times d\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}}$$

Biot-Savart Gesetz

Damit berechnet man das zu einem stromdurchflossen Leiter gehörende Magnetfeld.



$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{A\,dr}$$

EDyn 19.1.2021

• Fragen aus letzter VO

① Ampère'sches Gesetz = (erweiterte) Durchflutungsgesetz

Bedeutung: Elektr. Ströme, inkl. Verschiebungsströme, erzeugen magn. Wirbelfeld

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}$$

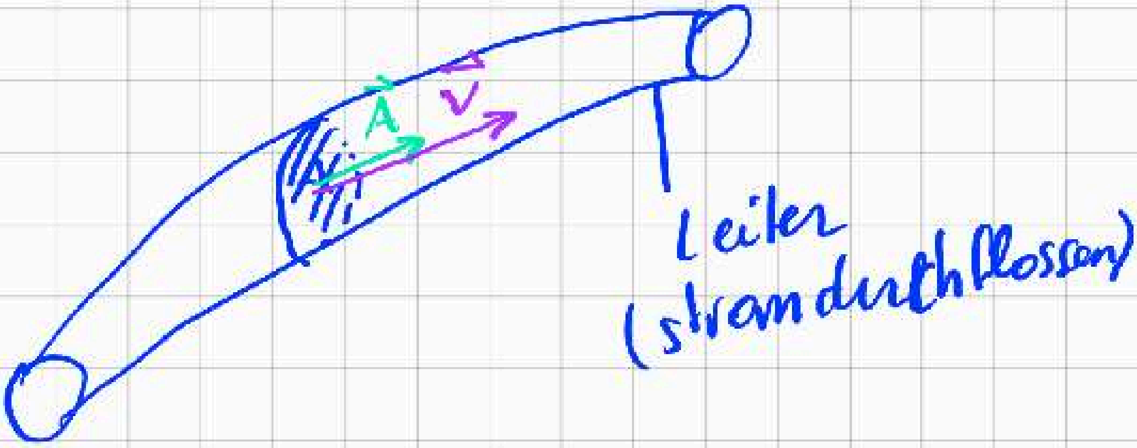
② Biot-Savart Gesetz

- folgt aus Maxwell Gleichungen
- allgemeinere Form, die das Ampère'sche Gesetz umfasst
- erlaubt aus gegebener Stromdichte die Berechnung des Magnetfeldes.

$$\underline{\vec{B}(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \underbrace{\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{J}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}\right)}_{\frac{\vec{J}(\vec{R})\times(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}} dv$$

⇒ Auswerten für dünnen Leiter

→ Biot-Savart Gesetz



$\vec{v}$ ... Geschwindigkeitsvektor der Ladungen

$\vec{A}$ .. Leiter-Querschnitts-Flächenvektor

- Wie stellt sich der Strom I dar?

  - Ladungsdichte $\rho = n \cdot q$

    $\downarrow$ Anzahl der Ladungsträger q pro Volumseinheit

  - I ... Ladung pro Zeiteinheit

$$I = \underline{n \cdot q} \cdot \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{A}}_{\text{Volumen pro Zeiteinheit}}$$

  - $\boxed{I = \vec{J} \cdot \vec{A}}$

    $\downarrow$ Stromladungsdichte

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = n \cdot q \cdot \vec{v} = \rho \cdot \vec{v}}$$

Darstellung der Stromdichte

- Elektrisches Potential

$$V(P) = \int_{P}^{P_0} \vec{F} \, d\vec{r}$$

Potential = Arbeit die verrichtet werden kann (potentielle), wenn sich die Probeladung q von dort wo sie sich gerade befindet (Punkt P) zu einem fest gewählten Bezugspunkt P_0 hinbewegt.

— Grenzen vertauschen:

$$\boxed{V(P) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F} \, d\vec{r}}$$

P_0 ... Bezugspunkt (oft im ∞)

Interpretation:

Die Potentielle Energie am Punkt P ist die Arbeit die verrichtet werden musste, um vom Bezugspunkt Po den Körper (hier: Ladung) mit einer Gegenkraft $-F$ zu Punkt P überzuführen.

⇒ Feld einer Punktladung Q (Coulomb Gesetz)

$$V(P) = -\int_{\infty}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r^2}\, dr$$

$\downarrow$

integrieren über den Abstand R mit Bezugspunkt ∞

Q..... Felderzeugende Ladung
q... Probeladung im Feld

$$\rightarrow \boxed{V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q\,q}{R}}$$

- **Lorenz - Eichung** : erweitert Coulomb-Eichung um zeitliche Ableitung des Potentials

(siehe „eichprinzip.pdf")

$\downarrow$

Abschnitt 5

EDyn 21.1.2021

• Allgemeine Definition des elektr. Potentials

- in einem System mehreren Punktladungen

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \sum_{i}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}}$$

Reihenentwicklung

Abstand zum Aufpunkt

- Solange $r_i \ll r$:

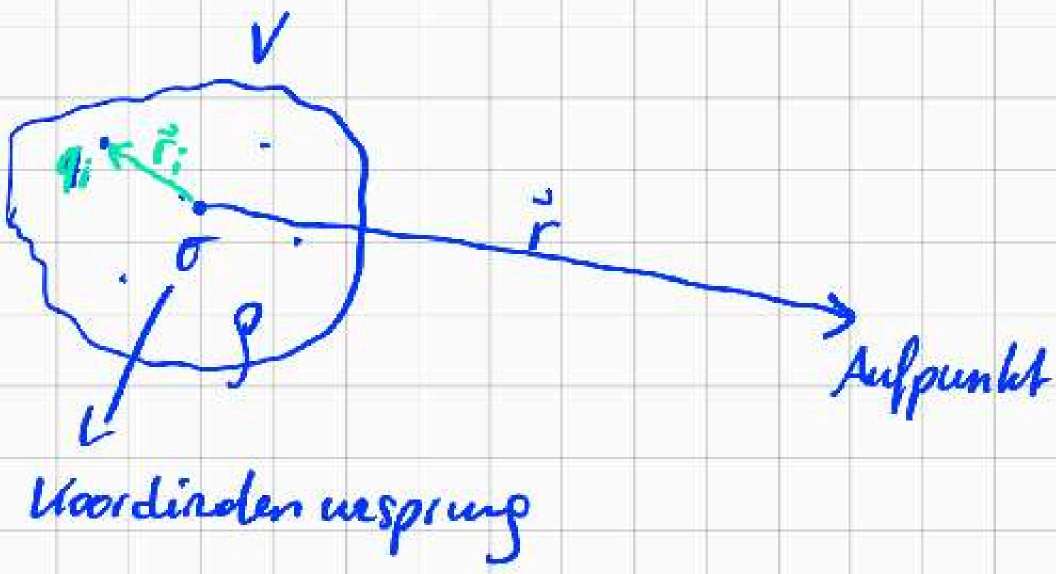
  kann $\phi(\vec{r})$ durch eine Taylorreihe angenähert werden:

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots$$

• Multipolentwicklung (Skript 5.5)

- Berechnung des Feldes einer räumlich begrenzten Ladungsverteilung in großer Entfernung (sehr weit entfernter Aufpunkt)

- Wir betrachten eine auf ein endliches Volumen V begrenzte Ladungsverteilung und untersuchen ihr Potential ϕ in einem Punkt P weit außerhalb von V.



Bemerkung: im Skript $\vec{r}\,'$ ist hier $\vec{r}_i$

Wählen unseren Ursprung als Ladungsschwerpunkt:

$$\boxed{\vec{r}_q = \frac{\sum_i |q_i| \vec{r}_i}{\sum_i |q_i|}}$$

Umschreiben von $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}_i + r_i^2}} =$

$$= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1-(2\vec{r}\vec{r}_i - r_i^2)/r^2}}$$

Reihenentwicklung von $(1-x)^{-\frac{1}{2}} =$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\,\frac{(2\vec{r}\vec{r}_i - r_i^2)}{r^3} + \frac{3}{8}\,\frac{(2\vec{r}\vec{r}_i - r_i^2)^2}{r^5} + \dots$$

Terme nach Potenzen von $\frac{r_i}{r}$ zusammenfassen:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_i}{r^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}_i)^2 - r_i^2 r^2}{r^5}$$

⇒ Potential ergibt sich zu:

nach Auswertung der Summe

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r}}_{\phi_0} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{p}_e\cdot\vec{r}}{r^3}}_{\phi_1} + \dots$$

Man sieht dass in großer Entfernung r dominiert ϕ_0.

· Monopol - Anteil:

$$\phi_0(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \frac{\overset{\sum_i q_i}{\overset{\parallel}{Q}}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

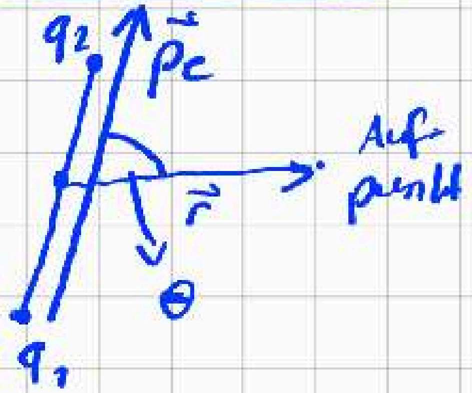
Die Gesamtladung (= Monopolmoment) $\boxed{Q = \sum_i q_i}$ erzeugt also in 0. Nährung der Taylor Entwicklung ein Feld, welches in sehr großer Entfernung jenem einer im Ursprung befindlichen Punktladung entspricht.

• Dipol-Anteil

$$\phi_1(\vec{r}) = \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3}$$

$$\boxed{\vec{p}_e = \sum_i q_i \vec{r}_i}$$

$$\boxed{\phi_1(\vec{r}) = \frac{p_e \cdot \cos\Theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2}}$$



• CPT Symmetrien (Kap. 6)

- Allgemein: Symmetrie bedeutet, dass ein Phänomen transformiert werden kann ohne dass sich dabei am Phänomen selbst etwas ändert.

- Vorstellung: Kreis. Dieser ändert sich durch Drehung nicht.

- Noether-Theorem: Erhaltungsgrößen spiegeln Symmetrie wider
- Das führt dann zu den in der VO betrachteten Eichtransformationen

- Daran anknüpfend besprechen wir jetzt CPT-Symmetrie.

• C-Symmetrie (Ladungskonjugation)

- Benjamin Franklin hat die Ladung des Elektrons als negativ definiert

- Könnte man diese Konvention ändern oder würde sich damit an unserem Verständnis des

Elektromagnetismus etwas ändern?

- Nein, denn Maxwell Glg (Coulomb-Welt) etc bleiben unverändert gültig.

- Maxwell Gleichungen sind invariant unter Vertauschung des Ladungsvorzeichens.

- siehe Skript:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(t', \vec{x}') &= -\vec{E}(t, \vec{x}) \\ \vec{B}(t', \vec{x}') &= -\vec{B}(t, \vec{x}) \end{aligned}}$$

- P-Symmetrie (Paritätsumkehr)

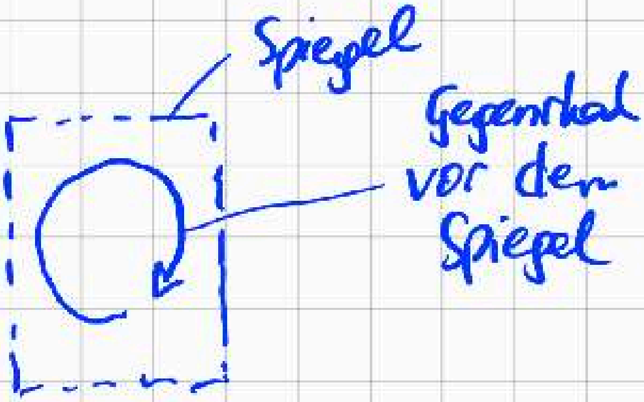
  - Vertauschen von links/rechts u. oben/unten
  - Was passiert bei 3D-Reflektion?
  - Spiegelbild:

Wenn man einen Gegenstand in linker Hand hält, scheint das Spiegelbild diesen in rechter Hand zu halten (Vertauschung links/rechts ein „Trick" unseres Gehirns).

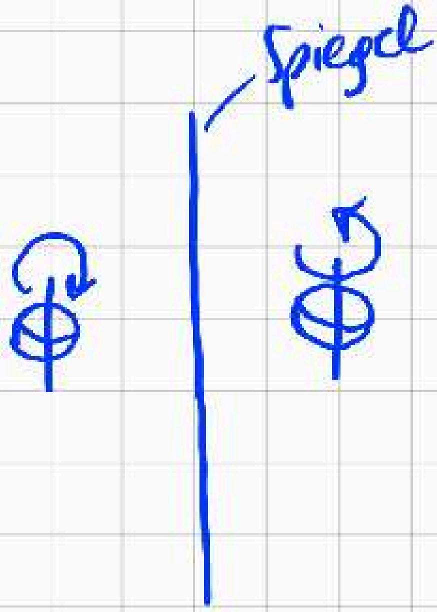
Hingegen die Orientierung von Gegenständen bleibt unverändert.

Aber wenn man einen Gegenstand vom Körper wegrichtet und den Spiegel betrachtet, dann wäre dort Vorne & Hinten vertauscht.

- **Bedeutung**



- Betrachte Gegenstand der sich im Uhrzeigersinn dreht. Drehrichtung im Spiegel unverändert.



- Was passiert also bei „horizontaler" Drehung ?

⇒ Drehrichtung im Spiegel ändert sich.

⇒ Symmetrie ist also hier gebrochen.

⇒ P-Symmetrie beschäftigt sich mit der Frage inwieweit sich ein Phänomen/Welt ändert wenn die Achsen umgekehrt werden (Minus-VZ).

⇒ Auf den ersten Blick sollte es keinen Unterschied machen ob eine Messung entlang Richtung x oder -x durchgeführt wird.

→ Bei Maxwell Gleichungen zeigen sich allerdings Unterschiede zwischen E- und B-Felder bei Paritätsumkehr:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(t',\vec{x}) &= -\vec{E}(t,\vec{x})\\ \vec{B}(t',\vec{x}) &= \vec{B}(t,\vec{x})\end{aligned}}$$

nicht invariant in Bezug auf P-Symmetrie

• T-Symmetrie (Zeitumkehr)

- Betrachten Phänomen und lassen anschließend „den Film" rückwärts laufen.
- Prüfe ob im Rückwärtslauf Gesetze verletzt werden.
- Ein Phänomen das vorwärts & rückwärts die Gesetze erfüllt nennt man T-invariant.
- Für E- & B-Felder:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}'(t',\vec{x}') &= E(t,\vec{x})\\ \vec{B}'(t',\vec{x}) &= -B(t,\vec{x})\end{aligned}}$$

→ Zusammenfassend:

Die Maxwell Gleichungen sind invariant unter kombinierter C, P und T-Transformation. Die CPT-Symmetrie ist erfüllt.

EDyn. 26. 1. 2021

• Elektromagnetische Wellen

– Grundlagen : $\boxed{u(\vec{r},t) = u_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

Auslenkung Amplitude

Schwingungs= gleichung (3-dim)

ω … Kreisfrequenz : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

$\vec{k}$ … Wellenzahlvektor

$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

T … Periodendauer

– 2-fache Ableitung nach Ort & Zeit liefert Wellengleichung :

1-dim: $$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v_{ph}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$ Wellen= glg.

Phasengeschwindigkeit

v_{ph} … Ausbreitungsgeschwindigkeit von Punkten konstanter Phase

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \cancel{2\pi}\,\nu \cdot \frac{\lambda}{\cancel{2\pi}} = \nu \cdot \lambda$$

$$\boxed{v_{ph} = \nu \cdot \lambda}$$

- Verallgemeinerung für 3-dim Fall:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\Delta u} - \frac{1}{v_{ph}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Δu

↓

Laplace Operator

$$\boxed{\Delta u - \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

Wellengleichung
(3-dim)

- Verallgemeinerung für n-dim. Fall mit d' Alembert Operator $\Box$

Def: $\boxed{\Box \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta}$

- Allgemeine Form der Wellengleichung

$$\boxed{\Box u = 0}$$ für Vakuum

• Elektromagn. Wellen im Vakuum $\left(\begin{matrix}\rho = 0\\ \vec{j} = 0\end{matrix}\right)$

$$\text{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \text{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \cancel{\mu_0 j} + \mu\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

bilden rot

$$\Rightarrow \underbrace{\text{rot rot}\,\vec{B}}_{\text{grad div} = 0,\ \text{weil div}\,\vec{B} = 0} = \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\vec{E}$$

$$\boxed{\text{„rot rot} = \text{“} \\ = \text{grad div} - \Delta}$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta\vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Box\,\vec{B} = 0} \quad \& \text{ analog } \boxed{\Box\,\vec{E} = 0}$$

- Retardierte Potentiele (Kapitel 9)

- bisherige Betrachtungen / Gesetze wirken „instantan"
  z.B: Coulomb-Kraft hat keine Zeitabhängigkeit
  (oder auch Newton Kraftgesetz)

- Verschiebt man eine Ladung/Masse spürt eine andere, weit entfernte Ladung/Masse das sofort ⇒ Die Kraft ändert sich unverzüglich. Das nennt man FERNWIRKUNG.

- Problem:
  - das stimmt nicht mit Beobachtungen überein
  - die Information muss sich erst über Raum ausbreiten
  - die Kraft muss sich gewissermaßen erst aufbauen. Diesen Prozess nennt man RETARDIERUNG (Verzögerung).

- Elektrische Potential im statischen Fall (siehe VO)

$$\phi_{stat}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \, dV$$

- Gesucht: $\phi(\vec{r}, t)$

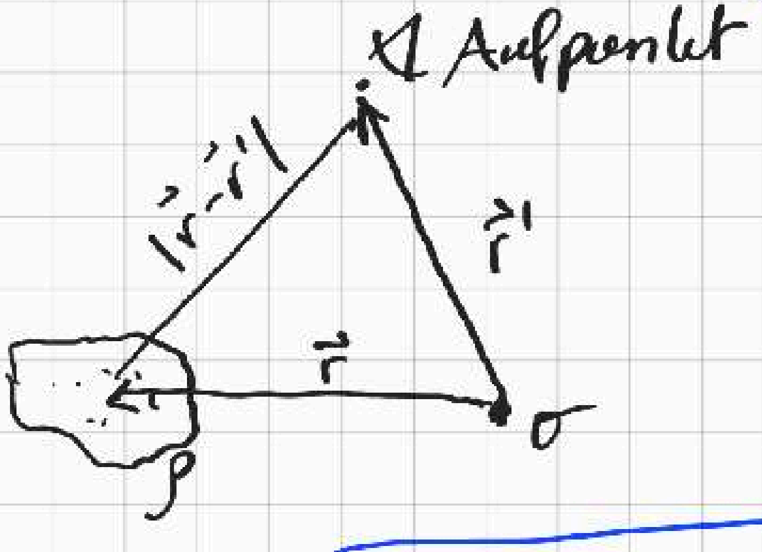
naiver Ansatz: $\rho(\vec{r}) \rightarrow \rho(\vec{r}, t) \Rightarrow \phi(\vec{r}, t)$

dieser Ansatz ist falsch und entspricht Fernwirkung; zeitliche Verzögerung bleibt unberücksichtigt.

- Lösung ist:

$$\boxed{\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(r, t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV}$$

diese 2 Zeiten müssen unterschiedlich sein.
Das Potential darf nicht sofort wissen, dass sich ρ geändert hat.



„educated guess": $\boxed{t' = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|}$

- Elektrostatik folgt für $c \rightarrow \infty$.

- Ausgangspunkt :

Elektrostatik:

Magnetostatik:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\phi \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{F}(\vec{r}) &= q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}}$$

Maxwell-Gleichungen (schon dynamisch):

3. Maxwell : $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4. Maxwell (Durchflutungs=gesetz) $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Problem: Gleichungen aus Elektrostatik müssen angepasst werden. Denn $\vec{E}$ kann nichtnur Gradient $(-\vec{\nabla}\phi)$ von etwas sein, da $\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0$.
↳ $\vec{E}$ kein Gradientenfeld.

Was aber Gültigkeit hat: $\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}\,\vec{A}$.

Wir ersetzen $\vec{B}$ mit rot $\vec{A}$:

3. Maxwell: $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\vec{A} = -\text{rot}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\underbrace{\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)}=0$$

↓

rot von diesem Ausdruck = 0

das heißt es handelt sich um ein konservatives Feld & es gibt ein Potential ϕ.

$$\Rightarrow \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

→ dynamische Term

↓

Verallgemeinerung für dynamische Prozesse

Wichtig: $\phi \neq \phi_{stat}$, d.h ϕ ist „Pseudopotential"
ähnlich wie Vektorpotential
$\vec{A}$.

Edyn 28.1.2021

⇒ Ab jetzt rechnen wir mit ϕ & $\vec{A}$ (statt $\vec{E}$ & $\vec{B}$).

$$\Rightarrow \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

„div von grad = Laplace"

$$\boxed{\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\,\vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ ++

entspricht Gauss-Glg ausgedrückt mit ϕ & A

4. Maxwell: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

„einsetzen $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$"

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times A) = \mu_0 \vec{J} - \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{\frac{1}{c^2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

„rot rot = grad div − Laplace"

$$-\Delta \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\Big(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}}\Big) = -\mu_0 \vec{J}}$$

+++

Wellengleichung

- möchte dass dieser Term 0 wird.
- prüfe ob es ϕ, A gibt sodass dies erfüllt ist.

← d.h.: wenden Konzept der Eichfreiheit an.

- wir hatten definiert : $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$

- wir wissen dass Rotation eines Gradientenfeldes gleich Null ist. Daher kann man den Gradienten einer beliebigen Funktion hinzufügen ohne dass $\vec{B}$ verändert wird.

- Diese beliebige Funktion nennen wir Λ:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$$

- Ziel ist ein Λ zu finden sodass der 2. Term in Glg (+++) wegfällt.

- Problem ist dass Übergang von $\vec{A} \to \vec{A}'$ auch Auswirkungen auf $\vec{E}$ hat, denn:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \qquad (++++)$$

- Daher muss es $\vec{E}'$ geben:

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

vgl.

- Wir möchten erreichen dass $\vec{E}' = \vec{E}$ ist.
- Daher ersetzen wir ϕ mit ϕ' und zwar derart das dieses gilt ($\vec{E}' = \vec{E}$):

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\left(\phi' + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

$$\phi = \phi' + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

- Auswirkung der Eichtransformation:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}}$$

$\vec{A}$ & ϕ nicht eindeutig aber diese Glg. müssen erfüllt sein.

- Einsetzen von $\vec{A}'$ & ϕ in 2. Term von (+++):

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \Delta\Lambda + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}}_{\text{Wellenglg.}} = -\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

- Wenn 2. Term in Glg ⓣ (+++) 0 ist, dann muss auch gelten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Und damit vereinfacht sich Glg (++) zu:

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (+++++)$$

„wieder Wellengleichung"

- Zusammenfassung:

$$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV \qquad (+)$$

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (++)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (++++)$$

$$\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)}_{\text{wollen}=0} = -\mu_0 \vec{J}$$

(+++)

$\nearrow \Delta, \vec{A}, \phi$

- Da alle Glg von gleichen Gestalt sind (Wellengl.) brauche ich nur die Lösung einer zu finden.

- Ausgangspunkt: (+++++)

$$\boxed{\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

- Lösung dieser Gleichung kennen wir:

$$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV}$$

mit $t' = t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|$

- Analog dazu:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV$$

- Kennen Beziehungen zwischen $\vec{B}$ & $\vec{A}$ bzw ϕ und $\vec{E}$:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{\rho(\vec{r},t')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + \frac{1}{c}\frac{\dot{\rho}(\vec{r},t')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}|^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]dV}$$

↓

allgemeine Lösung für E-Feld in Elektrodynamik

$$\boxed{\Rightarrow B(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{J}(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + \frac{1}{c}\frac{\dot{J}(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\right]\times(\vec{r}-\vec{r}\,')\,dV}$$

- **Bemerkung:**

  - Ableitung / Herleitung nicht im Detail wissen aber Herangehensweise:

    ⊛ Ausgangspunkt: E- & B Felder aus Elektrostatik & Maxwell Gleichung

    ⊛ Weg führt über die Hilfspotentiale ϕ & $\vec{A}$

    ⊛ Eichfreiheit verwendet: $\boxed{\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}}$

    Da Rotation eines Gradientenfeldes Null ist $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\Lambda$ hinzufügen ohne dass sich $\vec{B}$ ändert.

    ⊛ Änderung von $\vec{A}$ wirkt sich auch auf $\vec{E}$ - Feld aus. Daher brauchen wir ein ϕ', sodass $\vec{E}$ unverändert bleibt.

    ⊛ Mit Eichfreiheit möchten wir erreichen, dass 2. Term in Glg. für $\vec{A}$ verschwindet.

    ⊛ Lösung für $\vec{A}$ folgt Wellenglg.

⊛ Aus $\vec{A}$ ergibt sich dann Lösung für E & B, mit: $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

EDyn 2. Feb. 2021

- Relativistische Elektrodynamik (Kap. 10)
  - Lorentz Trafo (10.1) : siehe SRT
  - Kovariante Elektrodynamik (10.2)

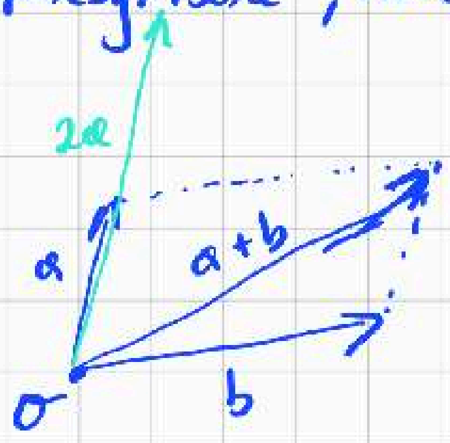
- Einschub : Tensoren
  - Es gibt 2 Arten von Vektoren

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Zeilen=}\\ \text{vektor}}}{(1,2,3)} \underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{\substack{\text{kein}\\ \text{Skalar=}\\ \text{produkt}}}}}{\cdot} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Spalten=}\\ \text{vektor}}}{\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}} = 1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6=32$$

  - d.h: Zeilenvektoren können auf Spaltenvektoren wirken und dabei eine Zahl produzieren.
  - Zeilenvektoren ... nennt man „kovariante" Vektoren
  - Spaltenvektoren ... „Kontravariante Vektoren"

• Reeller Vektorraum V

- keine Pfeilsymbole, trotzdem Vektoren!

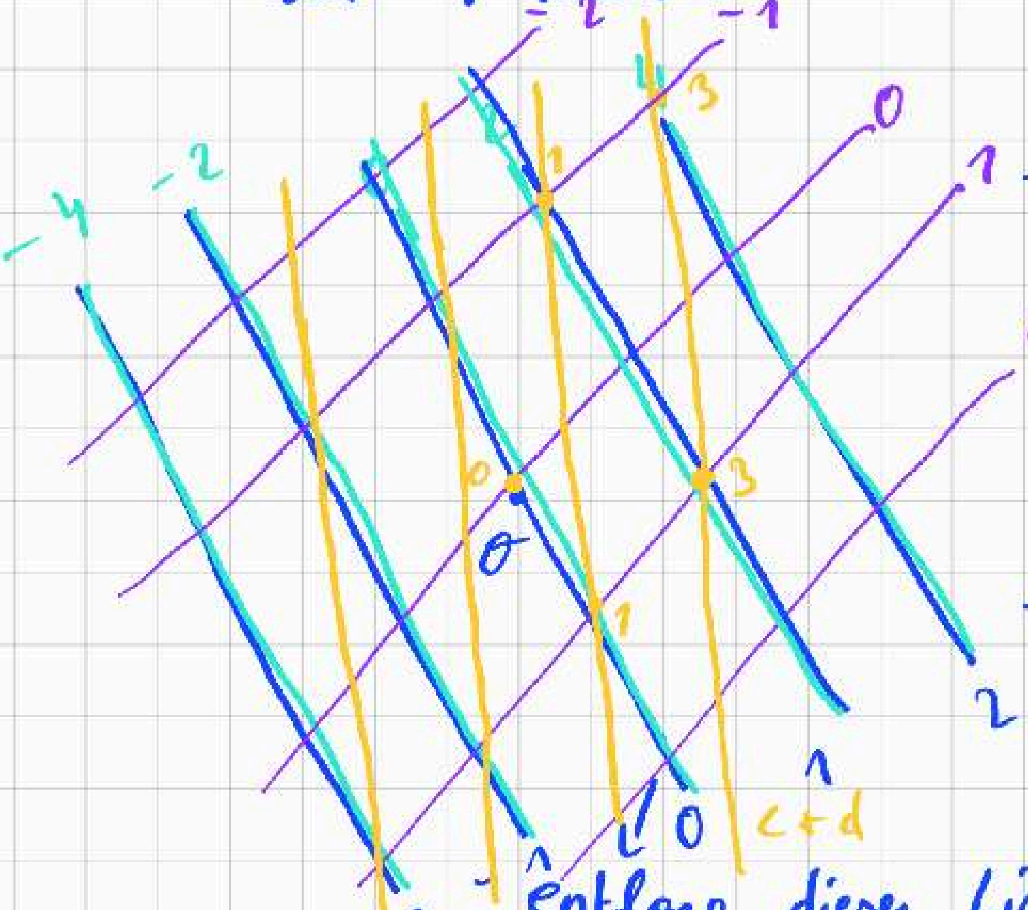


- reeller Vektorraum:
  - * Vektor kann man mit beliebig rellen Zahl multiplizieren: 2a
  - * Addition: a+b
  - * Reihenfolge der Addition ist egal
  - * Produkte ausklammern
  - etc.
- Vektorraum findet man die „normalen" Spaltenvektoren.
- Zu jedem dieser Spaltenvektoren gibt es einen Partner. Und diese heißen KOVEKTOREN.

• Duale<u></u>r Vektorraum V^*

- Menge aller Kovektoren
- Kovektoren sind <u>lineare Abbildungen</u>

von V nach ℝ

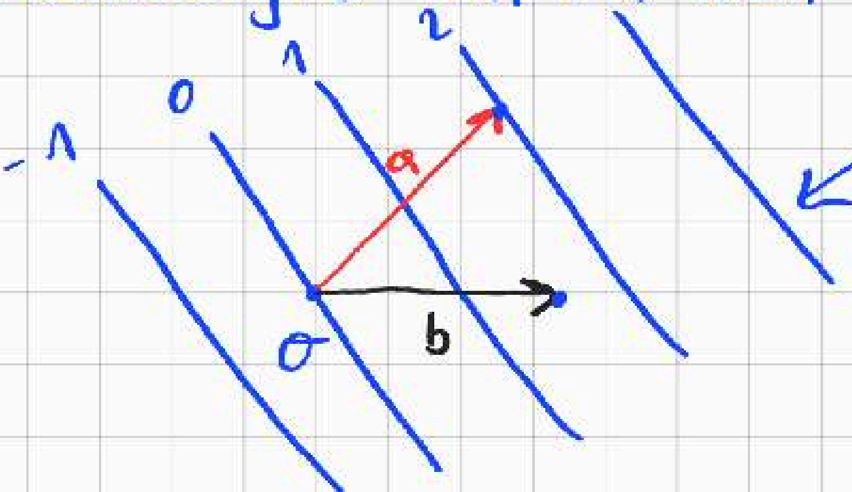


- diese Höhenlinien einer schiefen Ebene nennen wir $\underbrace{\text{Funktion } c}_{\text{Kovektoren } c}$

- betrachten:
  - * Multiplication 2c
  - * Addition:
    d
    c+d

^ entlang dieser Linie soll Funktion 0 sein

- lin. Abbildungen vom VR nach ℝ



Kovektoren c

$$\left.\begin{array}{l} c(a) = 2 \\ c(b) = 1{,}5 \end{array}\right\}$$ entspricht „Kovektor · Vektor = Zahl"

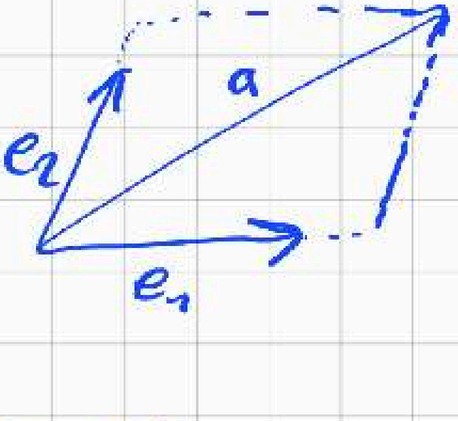
Kovektor ↓ Zeilenv.

Vektor ↓ Spaltenv.

- Linearität bedeutet:

$$c(\lambda a) = \lambda \cdot c(a)$$
$$c(a+b) = c(a) + c(b)$$

- alle Vektorräume haben Eigenschaft, dass man nur einige Vektoren benötigt, um alle anderen darzustellen ⇒ minimale Zahl an Vektoren nennt man <u>BASIS</u> :



$$a = \underset{\Uparrow}{\boxed{1{,}3}}\, e_1 + \boxed{1{,}2}\, e_2$$

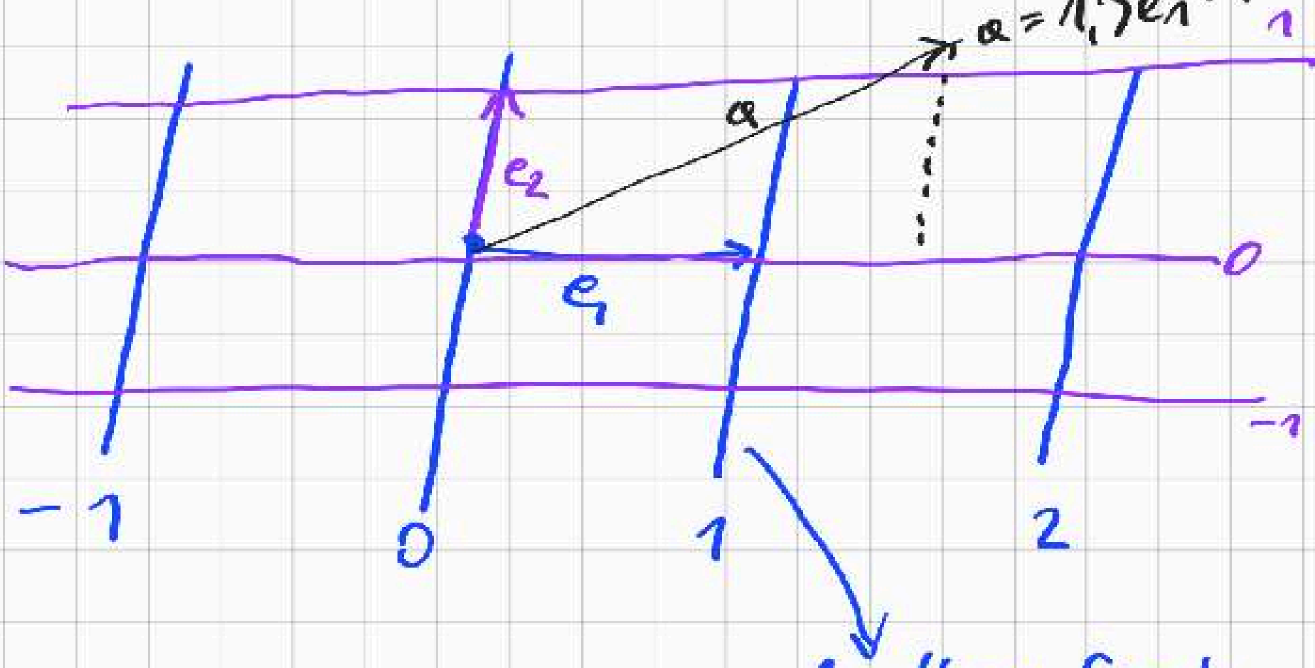
• <u>Basis im Dualvektorraum</u>

$\{e_1, e_2\}$ ist <u>eine</u> Basis von V

Zu dieser Basis wollen wir eine Basis $\{e^1, e^2\}$ finden mit der man alle Kovektoren bilden kann.

$\{\underbrace{e^1, e^2}_{\downarrow}\}$ ... eine Basis von V^*

- lineare Abbildungen, die aus Vektor eine reelle Zahl produzieren
- Welche Zahlen sollen das sein?
- Wenn man e^1 anwendet auf a, dann ergibt das 1,3.



auf diesen Geraden enden alle Vektoren, die 1 mal e_1 enthalten

- Zu jeder Basis des Vektorraums kann man eine duale Basis finden, die diese Komponenten herausnimmt.

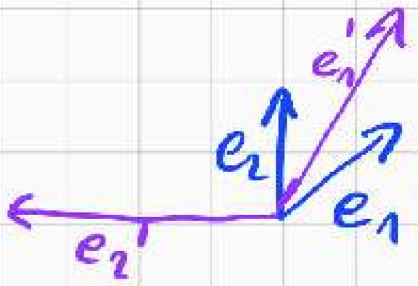
$$e^1(e_1) = 1$$
$$e^2(e_1) = 0$$
$$e^2(e_2) = 1$$

- Allgemeiner:

$$e^k(e_l) = \begin{cases} 1, \text{wenn } k = l \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \delta^k_l$$ <u>Kronecker - Delta</u>

- Es gibt ∞ viele Basen



$\{e_1, e_2\}$ oder $\{e_1', e_2'\}$ .... stellen selben Vektorraum dar.

In Physik muss es egal sein welche Basis verwedet wird. !

- e_1' bzw. e_2' muss man durch alle Basis darstellen können

$$e_1' = \bigcirc e_1 + \bigcirc e_2 + \dots + \bigcirc e_n$$

¿

?

$\Updownarrow$

$$\Rightarrow e_1' = \overbrace{e^1(e_1')}\, e_1 + e^2(e_1')\, e_2 + \dots + e^n(e_1')\, e_n$$

Kovektor

$$\Rightarrow \boxed{e_l' = \sum_{k=1}^{n} e^k(e_l')\, e_k}$$

l-te Komponente

Kovariantes Transformations = verhalten

⇒ Größen, die sich auf diese Art transformieren, von einer Basis zur anderen heißen

KOVARIANT.

$\Updownarrow$

„gehen mit Basis"

• Kontravariantes Transformationsverhalten

$$a \in V$$

$$a = \bigcirc e_1 + \bigcirc e_2 + \dots + \bigcirc e_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\boxed{a^k}}_{k\text{-te Komponente}} e_k$$

in einer anderen Basis sieht derselbe Vektor so aus:

$$a = \sum_{j=1}^{n} a'^j e'_j$$

⇒ Wenden l-ten Vektor der neuen Basis darauf an:

$$e'^l(a) = a'^l$$

⇒ Alternativ: Wie ist a zusammengesetzt?

$$= e'^l\left(\sum_{k=1}^{n} a^k e_k\right)$$

$$\boxed{a'^l = \sum_{k=1}^{n} a^k e'^l(e_k)}$$

kontravariantes Transformationsverhalten

- a nennt man einen kontravarianten Vektor.
- Komponenten a^k transformieren kontravariant

• Kovariantes Transformationsverhalten

$$b \in V^*$$

$$b = \sum_{k=1}^{n} b_k e^k = \sum_{j=1}^{n} b'_j e'^j$$

„b, unten k“

⇒ Wende Kovektor an auf l-tes Element der neuen Basis e'

$$\Rightarrow b(e'_l) = \sum_{j=1}^{n} b'_j \underbrace{e'^j(e'_l)}_{\delta^i_l} = b'_l$$

$$\Rightarrow \boxed{b'_l = \sum_{k=1}^{n} b_k e^k(e'_l)}$$

Vektor der neuen Basis

Vektor der alten Dualbasis

⇒ Kovariantes Transformationsverhalten

• Tensoren

Kontravariant Stufe 2

$$A^{ij}_{klm}$$

Kovariant Stufe 3

So eine Sammlung A^{ij}_{klm} von Zahlen heißt dann Komponenten eines Tensors, wenn sie richtig transformieren. Und zwar kovariant in ij & kontravariant in k, l, m.

$$\boxed{A'^{pq}_{rst} = \sum_{ijklm} \underbrace{A^{ij}_{klm}\, e'^{p}(e_i)\, e'^{q}(e_j)}_{\text{Kontravariant in ij}}\, e^{k}(e'_r)\, e^{l}(e'_s)\, e^{m}(e'_t)}$$

- Vektor sind Spezialfall: Kontravariant 1. Stufe
  Kovariant 0. Stufe

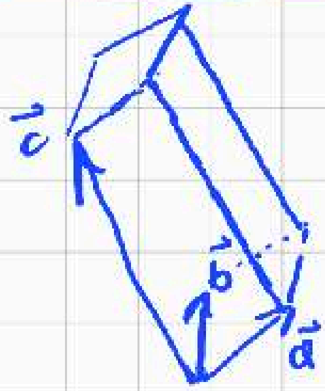
- Skalare : Kontra- & kovariant 0. Stufe
  (Zahl im neuen & alten System)
  dieselbe

EDyn

4\. Feb. 2021

- Vierervektoren, Volumina in 3D & 4D

Ⓢ3D



- Parallelepiped

$$\text{Volumen} = \text{Vol}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Volumen ist mit Vorzeichen versehen:
  VZ positiv wenn a, b, c rechte-Hand-Regel folgen

- Determinante nennt man auch:

  antisymmetrische Linearform

  wenn 2 Vektoren vertauscht werden, dann ändert sich VZ

  - Summen zerlegen
  - Vielfaches „rausziehen"

- Determinante kann man kürzer Schreiben:

„$a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3$" oder $-a_3 b_2 c_1$

$$\mathrm{Det} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j}^{3}\sum_{k}^{3} \underset{\Big\downarrow}{\varepsilon_{ijk}}\, a_i b_j \cdot c_k$$

Levi-Civita-Symbol

$\varepsilon_{123} \ldots = a_1 b_2 c_3 \ldots$ soll demnach 1 sein

- Bei Vertauschung von 2 Elementen soll -1 raus kommen

- Wenn 2 Indizes gleich sind, ist ε gleich 0

④D

$$\mathrm{Vol}\underbrace{(a,b,c,d)}_{d} := \begin{vmatrix} a^0 & b^0 & c^0 & d^0 \\ a^1 & \cdot & & \\ a^2 & & \cdot & \\ a^3 & & & \cdot \end{vmatrix}$$

Vektoren, aber verwende keine Pfeile

$$a = a^{\mu} e_{\mu}$$

„Trick“: Bilde Produkt von 3 Matrizen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ b^0 & b^1 & \cdots & \\ c^0 & \cdots & & \\ d^0 & \cdots & & \end{pmatrix}}_{\text{Transponierte von}} \underbrace{\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}}_{\text{metrische Tensor in allgemeinen Basis}} \underbrace{\begin{pmatrix} a^0 & b^0 & c^0 & d^0 \\ a^1 & \cdots & & \\ a^2 & & \ddots & \\ a^3 & & & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{kompletter Vektoren in allg. Basis}}$$

$$\begin{pmatrix} g_{00} \cdot a^0 & g_{01} a^1 & g_{02} a^2 & g_{03} a^3 \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & \cdot & & \\ a_2 & & \ddots & \\ a_3 & & & \cdot \end{pmatrix}$$

… Metrische Tensor senkt den Index

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 \\ c^0 & \cdot & & \\ d^0 & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & \cdot & & \\ a_2 & & \ddots & \\ a_3 & & & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^0 a_0 + a^1 a_1 + a^2 a_2 + a^3 a_3 \ \dots \\ b^0 a_0 + b^1 a_1 + \dots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle \\ \langle b,a\rangle & \ddots \\ \langle c,a\rangle & & \ddots \\ \langle d,a\rangle & & & \ddots \end{pmatrix}$$

⇒ Ergebnis ist unabhängig von Basis, denn nur Skalare.

⇒ Die Determinante ist wieder ein <u>Skalar</u>.

⇒ Determinante eines Matrizenprodukts ist gleich dem Produkt der Determinanten.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & \dots \\ g_{10} & \vdots \\ \vdots \end{vmatrix} \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} a^0 & b^0 & c^0 & d^0 \\ a^1 & \ddots \\ a^2 & & \ddots \\ a^3 & & & \ddots \end{vmatrix}}^{Vol(a,b,c,d)}{}^2 \dots \text{Skalar}$$

⇒ „Kunstgriff": Verwende <u>Orthonormalbasis</u>

⇒ Vereinfachung

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot Vol(a,b,c,d)^2$$

$\Rightarrow$ Umformen nach Volumen:

$$Vol(a,b,c,d) = \underbrace{\sqrt{-g}}_{\text{Determinante des metrischen Tensors in beliebiger Basis}} \cdot \begin{vmatrix} a^0 & b^0 & c^0 & d^0 \\ a^1 & \cdot & & \\ a^2 & & \cdot & \\ a^3 & & & \cdot \end{vmatrix}$$

- Determinante wieder mit Levi-Civita-Symbol umschreiben:

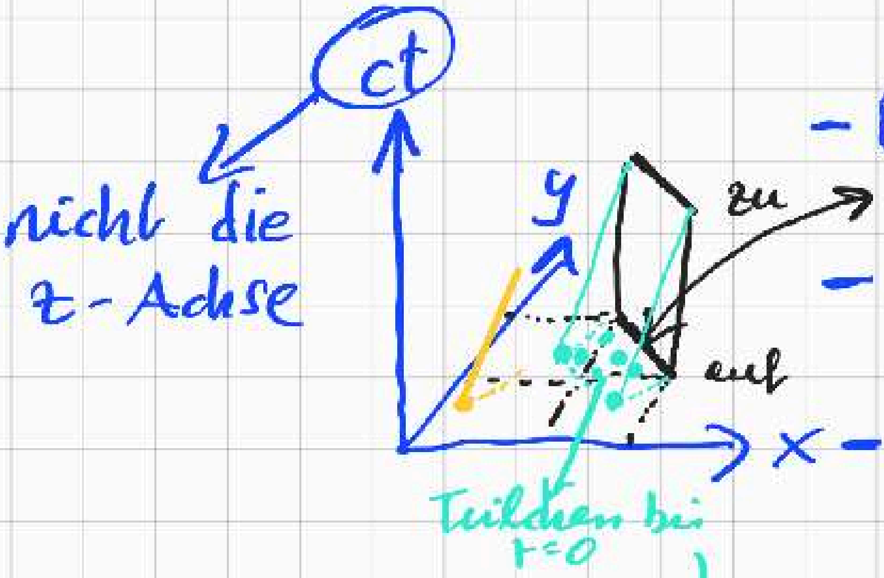
$$\underbrace{Vol(a,b,c,d)}_{\text{Skalar}} = \underbrace{\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\vartheta\lambda\mu\nu}}_{\text{Tensor}}\, \underbrace{a^{\vartheta}\, b^{\lambda}\, c^{\mu}\, d^{\nu}}_{\text{beliebige 4er-Vektoren}}$$

- Levi - Civita Symbol in 4D

ε_{0123} ...	1	
ε_{1123} ...	0	zwei gleich
ε_{2322}	0	drei gleich
ε_{1023} ...	-1	antisymmetrisch
ε_{1230} ...	-1	zyklisch ⇓ Besonderheit in 4D

• Vierer - Strom (dichte)

- Vereinfachte Darstellung mit 2 Raumachsen + 1 Zeitachse



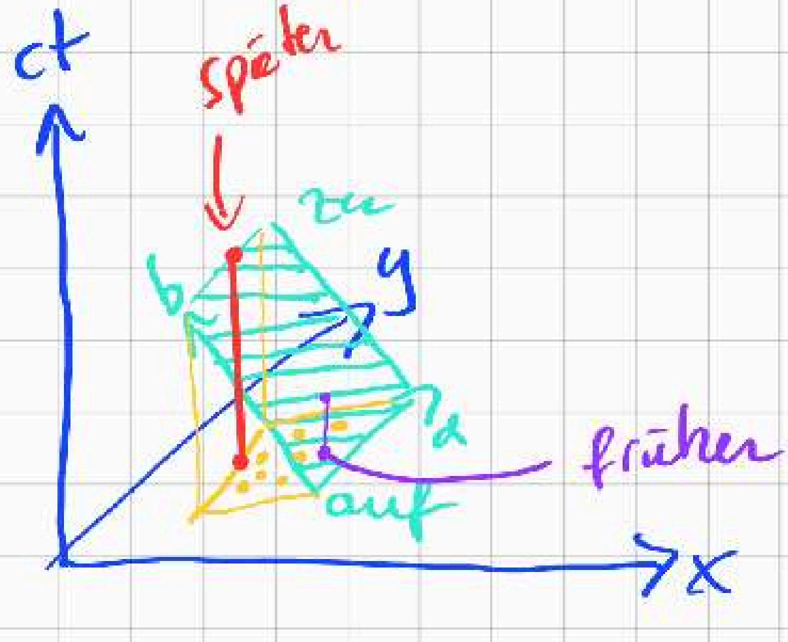
- Betrachten ein Fenster
- Bei t=0 : Fenster auf
- Annahme: homogener Teilchen-strom

Teilchen in diesem Parallelogramm schaffen es durchs Fenster

- Anzahl der Teilchen = „Dichte · Fläche"

→ Fläche $\propto$ # Teilchen, die durchs Fenster kommen

- Nun betrachten wir Fenster das sich zusätzlich noch bewegt



- N(a,b)... Anzahl der Teilchen, die durch Fenster gehen

- $N(a,b)$ proportional zu Fläche

- feststellen, dass $N(a,b)$ linear sein

  $$\underbrace{N(a,b)}_{\text{„Kantenvektoren"}}$$

- antisymmetrisch : Abhängigkeit von Richtung des Teilchenstroms

- $N(a^\alpha e_\alpha, b^\beta e_\beta, c^\gamma e_\gamma) = a^\alpha b^\beta c^\gamma \underbrace{N(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma)}$

  Wieviel Teilchen kommen durch so ein „einfaches" Fenster durch?

- $N(e_\alpha, e_\beta, e_\beta)$ ...... 4×4×4 Zahlen

  z.B: ~~0 0 0~~

  ~~0 0 1~~

  ~~0 0 2~~

  ~~0 0 3~~

  ~~0 1 0~~

  } „zwei gleiche Kanten" =0

  ~~0 1 1~~ wieder 2 gleiche

0 1 2 ✓

0 1 3 ✓

~~0 2 0~~

0 2 1 ⊖ ✓

⇒ 4 Komponent bleiben übrig:

$$J^0 \;,\; J^1 \;,\; J^2 \;,\; J^3$$

$$\begin{aligned} J^0 &:= N(e_1,e_2,e_3) \quad (-1) \\ J^1 &:= \boxed{\frac{c}{\sqrt{-g}}}\, N(e_0,e_2,e_3) \\ J^2 &:= N(e_0,e_3,e_1) \\ J^3 &:= N(e_0,e_1,e_2) \end{aligned}$$

c ... damit die Einheiten richtig sind

$\frac{1}{\sqrt{-g}}$ ... damit richtig transformiert

$$\Rightarrow \underbrace{N}_{\text{Skalar}} = \underbrace{a^\alpha b^\beta c^\gamma}_{\text{beliebige 4er-Vektoren}} \frac{1}{c} \underbrace{\sqrt{g}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}}_{\text{Tensor}} \underbrace{J^\lambda}_{\text{Ausdruck für N}}$$

⇒ J muss 4er-Vektor sein!

⇒ J ist Vierer-Strom

- besagt Richtung & Dichte des Teilchenstroms

- Beispiel: orthonormale Basis

$$N\left(\begin{pmatrix} c\cdot 1s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1m \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{-(-1)}\,\cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} c\cdot 1s & 0 & 0 & J^0 \\ 0 & 1m & 0 & J^1 \\ 0 & 0 & 1m & J^2 \\ 0 & 0 & 0 & J^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{c}} \cdot 1 \cdot \cancel{c} \cdot 1s \cdot 1m^2 \cdot J^3$$

⇒ umformen nach J^3

⇒ $J^3 = \frac{\text{„Anzahl"}}{m^2 \cdot \text{Sekunde}}$

⇒ J^3 .... z - Komponente aus Stromdichte wie man aus 3D kennt.

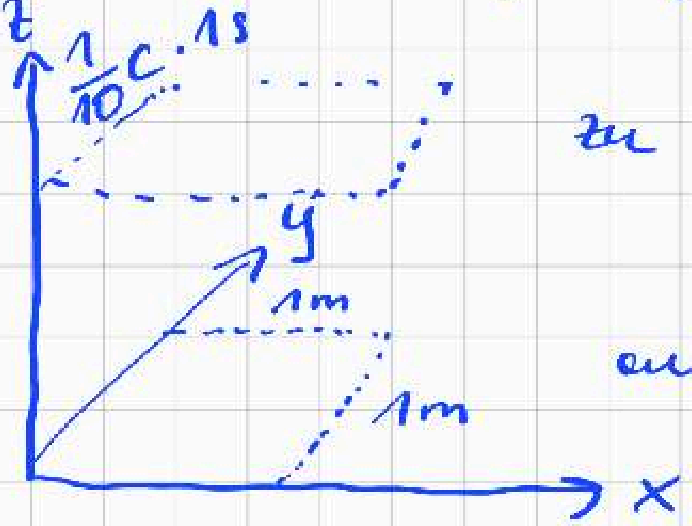
- Beispiel :

$$N\left(\begin{pmatrix} c\cdot 1s \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{10}\, c\cdot 1s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1m \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

⇒ J^0 .... Dichte des Teilchenstroms

EDyn 9. Feb. 2021

• ad Viererstrom : Beispiel (orthonormal-Basis)



$$N\left(\begin{pmatrix} c \cdot 1s \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{10} c \cdot 1s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1m \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{c} \sqrt{+1} \begin{vmatrix} c \cdot 1s & 0 & 0 & J^0 \\ 0 & 1m & 0 & J^1 \\ 0 & 0 & 1m & J^2 \\ \frac{1}{10} c \cdot 1s & 0 & 0 & J^3 \end{vmatrix} =$$

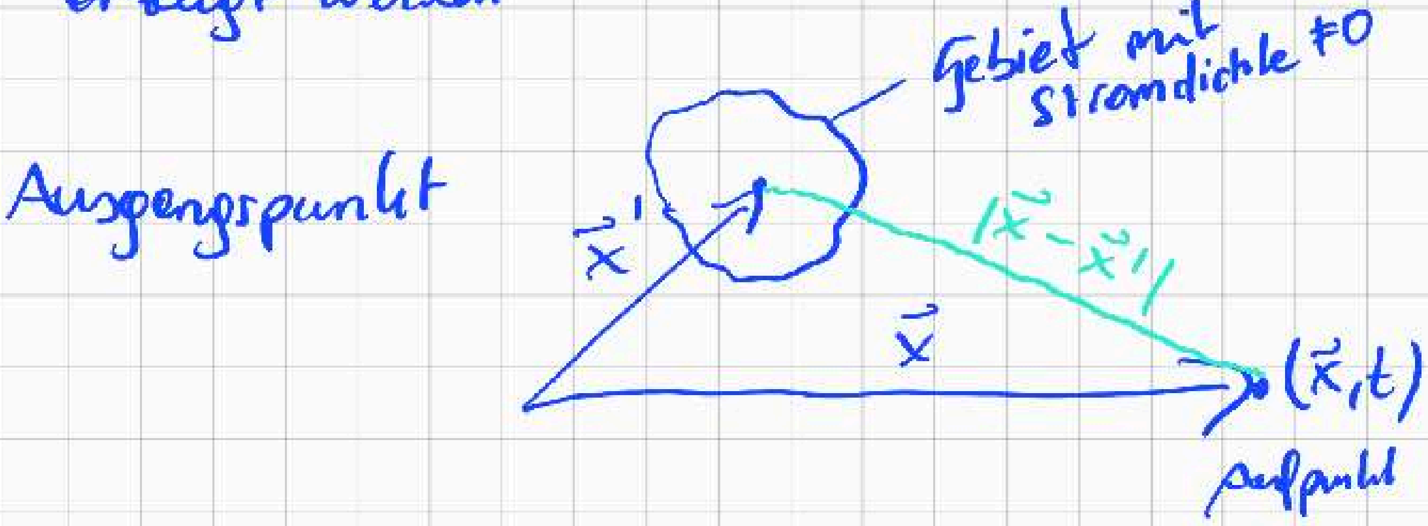
$$N = \frac{1}{c} \cdot c \cdot 1s \cdot 1m^2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{letztes} \\ \text{Mal besprochen}}}{J^3} - \frac{1}{c} \overbrace{\underbrace{\frac{1}{10} c \cdot 1s}_{\substack{\text{Strecke,} \\ \text{die das} \\ \text{Fenster} \\ \text{zurücklegt}}} \cdot 1m^2}^{\text{Volumen}} \cdot \boxed{J^0}$$

$\Rightarrow \frac{J^0}{c}$ muss als Einheit V^{-1} haben → Dichte

$\Rightarrow \frac{J^0}{c}$ ..... Stromdichte

• Lienard - Wiechert Potentials

„Elektromagn. Felder durch bewegte Punktladungen erzeugt werden"



$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}',t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, dV$$

$$t' = t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'| = ct - |\vec{x}-\vec{x}'|$$

Umschreiben mit Hilfe von 4er-Vektoren:

⊛ $$A^\mu(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J^\mu(ct-|\vec{x}-\vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, dV$$

A^μ ... Viererpotential

↓

fasst Skalarpotential & Vektorpotential zusammen: $A(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \Phi(\vec{x})/c \\ \vec{A}(\vec{x}) \end{pmatrix}$

- Annahme: Stromdichte rührt von einzelnen Punktteilchen mit Ladung q her, welches sich auf einer Trajektorie $\vec{R}(t)$ bewegt.

$\Rightarrow$ Ladungsdichte: $\rho(\vec{x},t) = q \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Deltafunktion}}}{\delta} \left(\vec{x} - \vec{R}(t)\right)$

$\Rightarrow$ Stromdichte: $\vec{j}(\vec{x},t) = q\,\dot{\vec{R}}(t) \cdot \delta\left(\vec{x} - \vec{R}(t)\right)$

mit 4er-Strom: $j^\mu = q \cdot v^\mu(t) \cdot \delta\left(\vec{x} - \vec{R}(t)\right)$

$\downarrow$

$v^\mu = \begin{pmatrix} c \\ \dot{\vec{R}}(t) \end{pmatrix}$

- „Trick": Gleichung ⊛ aufschreiben mit Zeit- & Volumsintegration (d^4x')

$$A^{\mu}(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J^{\mu}(ct,\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\underbrace{\delta\left(c(t-t')-|\vec{x}-\vec{x}'|\right)}\,d^4x'$$

↓ Deltafunktion entspricht Δt

- Übergang zu $\underbrace{\text{Zeitintegral}}_{x'=c\cdot dt'}$ & Einsetzen des 4er-Stroms:

$$A^{\mu}(x)=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\,c\int\frac{\delta[c(t-t')-|\vec{x}-\vec{R}(t')|}{|\vec{x}-\vec{R}(t')|}\,v^{\mu}(t')\,dt'$$

Viererstrom

⇒ Das Hauptproblem ist nun reduziert auf das Argument in der δ-Funktion, d.h.: müssen t' finden für das Argument 0 wird.

⇒ Bemerkung: $$\delta[f(t')]=\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta[t'-t_i]}{|\dot{f}(t_i)|}$$

N.. Anzahl Nullstellen von f
$t_1 .. t_N$ .... einfache Nullstellen

⇒ Für unseren Fall:

$$f(t') = c(t-t') - r(t') \, , \quad r(t') = |\vec{x} - \vec{R}(t')$$

$$\dot{f}(t') = -c + \frac{[\vec{x} - \vec{R}(t')] \cdot \dot{\vec{R}}(t')}{|\vec{x} - \vec{R}(t')|}$$

→ definiere: $\vec{n}(t') := \frac{\vec{x} - \vec{R}(t')}{|\vec{x} - \vec{R}(t')|}$

$$\dot{f}(t') = -c \underbrace{\left[1 - \vec{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t')\right]}$$

$$\vec{\beta}(t') = \frac{\dot{R}(t')}{c}$$

dieser Ausdruck immer positiv, da $|\vec{\beta}| < 1$ für Teilchen mit Masse

→ $f(t)$ hat stets negative Steigung

⇒ monoton fallend

⇒ impliziert, dass $f(t)$ max. 1 Nullstelle hat.

⇒ Diese Nullstelle $t' = t_{ret}$ (bei retardierter Zeit)

$$\Rightarrow \boxed{c t_{ret} = ct - r(t_{ret})}$$

„implizite" Lösung

⇒ Diese Lösung bestimmt die retardierte Zeit, zu der das an einem Raumpunkt $(\vec{x}, t)$ empfangene „Signal" vom Emitter (Ladung q) ausgesandt wurde

- Ausführung der t'-Integration (δ-Funktion vereinfacht sich)

$$\boxed{A^\mu(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\, v^\mu(t_{ret})}{r(t_{ret}) \underbrace{\left[1-\vec{n}(t_{ret})\vec{\beta}(t_{ret})\right]}_{\kappa(t_{ret})}}}$$

Lienard-Wiechert'sche Potential

$c t_{ret} = ct - r(t_{ret})$ ⟺ Lösung f. retardierte Zeit

$r(t_{ret}) = |\vec{x} - \vec{R}(t_{ret})|$ ⟺ Abstand zum ret. Zeitpunkt zum Aufpunkt

$\vec{\beta}(t_{ret}) = \frac{v(t_{ret})}{c}$

• Überführung in 3er-Schreibweise

$$\underbrace{\phi(\vec{x},t)}_{\downarrow} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r(t)\left[1-\vec{n}(t)\cdot\vec{\beta}(t)\right]}\Bigg|_{t=t_{ret}}$$

daraus wird dann
E-Feld
bestimmt

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{\beta}(t)}{r(t)\left[1-\vec{n}(t)\cdot\vec{\beta}(t)\right]}\Bigg|_{t=t_{ret}}$$

$\downarrow$

wird B-Feld
bestimmt

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}}$$

• Feldstärken einer bewegten Ladung

„dazu müssen wir partielle Orts- & Zeitableitungen bestimmen".

①

⟹ Betrachten Zeitableitung von tret nach t

$$t_{ret}(\vec{x},t) = t - \frac{1}{c}\, r(t_{ret})$$

$$r(t_{ret}) = \left|\vec{x} - \vec{R}(t_{ret})\right|$$

$$\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial r(t_{ret})}{\partial t} = 1 + \vec{n}\cdot\vec{\beta}\,\Big|_{t=t_{ret}} \cdot \frac{\partial t_{ret}}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial t_{ret}}{\partial t} = \frac{1}{\kappa(t_{ret})}}$$

②

⟹ Zeitableitung von r(tret) nach t

$$\frac{\partial r(t_{ret})}{\partial t} = -\frac{\vec{n}\cdot\vec{\beta}}{\kappa}\cdot c\,\Big|_{t=t_{ret}}$$

③

→ Zeitableitung von κ(tret) nach t

$$\frac{\partial \kappa(t_{ret})}{\partial t} = \frac{1}{\kappa}\left[\frac{c}{r}(\vec{n}\times\vec{\beta})^2 - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Beschleunigungsterm}}}{\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}}\right]\Big|_{t=t_{ret}}$$

④ Aus diesen 3 Ergebnissen folgt:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{\beta}}{K^3}\left(\vec{n}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r\cdot c}\cdot\frac{1}{K^3}\left(\dot{\vec{\beta}}+\vec{n}\times\left(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right)$$

In weiterer Folge müssten Ortsableitungen durchgeführten werden ($\vec{\nabla} r(t_{ret})$, $\vec{\nabla} K(t_{ret})$, $\vec{\nabla}\phi$, $\vec{\nabla} t_{ret}$):

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2K^3}\left(\vec{n}-\vec{\beta}-\vec{\beta}\times\left(\vec{n}\times\vec{\beta}\right)\right)-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r\cdot c\cdot K^3}\left(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right)\vec{n}$$

$$\boxed{\Rightarrow E(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{K^3}\left[\frac{1-\vec{\beta}^2}{r^2}\left(\vec{n}-\vec{\beta}\right)+\frac{1}{r\cdot c}\vec{n}\times\left[\left(\vec{n}-\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{\beta}}\right]\right]_{t=t_{ret}}}$$

$$\boxed{B(\vec{x},t)=-\frac{\mu_0\, c\cdot q}{4\pi\, K^3}\left[\frac{1-\vec{\beta}^2}{r^2}\left(\vec{n}\times\vec{\beta}\right)+\frac{1}{r\cdot c}\vec{n}\times\left(\dot{\vec{\beta}}+\vec{n}\times\left(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right)\right]_{t=t_{ret}}}$$

EDyn

11. Feb. 2021

- elektr. & magn. Kraft:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \qquad \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

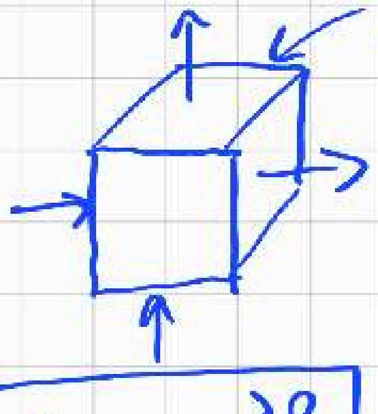
- Lorentzkraft im weiteren Sinne:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- Raumladungsdichte : $\rho = \frac{Q}{V}$

- Stromdichte : $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$

→ Zusammenhang zwischen ρ & $\vec{j}$:



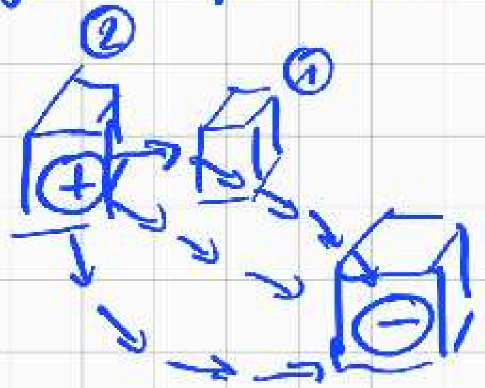
Ladungsverteilung im inneren des Würfels

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Kontinuitätsgleichung

„Ladungen gehen nicht verloren"

- Gauß'sches Gesetz für elektr. Felder



① soviel rein wie raus

② mehr raus

③ mehr rein

$$\operatorname{div}\vec{E} = \text{const} \cdot \rho$$

$\downarrow$

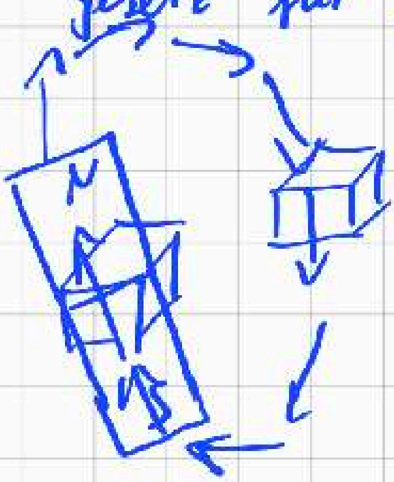
Naturkonstante

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

1. Maxwell

Bedeutung: Ladungen = Quellen d. E-Feldes

- Gauß'sche Gesetz für Magnetfelder:



hier immer genausoviel rein wie raus

$$\longrightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$$

2. Maxwell

Bedeutung: Es gibt keine magn. Monopole.

- Durchflutungsgesetz :

- Ladungen aus Tiefe des Raums

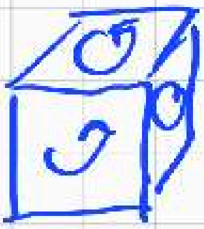
- Rundherum entsteht B-Feld = Wirbelfeld

$$\Rightarrow \text{rot}\ \vec{B} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Naturkonstante}}}{\text{const}} \cdot \vec{J}$$

$$\rightarrow \boxed{\text{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$ Durchflutungsgesetz

- Maxwells Reparatur des Durchflutungsgesetzes:

Ansatz: (bilden div) $\text{div rot}\ \vec{B} = \mu_0 \underbrace{\text{div}\ \vec{J}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$



$\text{div rot} = 0$

$$\overset{?}{\Rightarrow} 0 \overset{?}{=} -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$ → 1. Maxwell: $\rho = \varepsilon_0\, \text{div}\, \vec{E}$

4.
$\Rightarrow$
Maxwell

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}\right)}$$

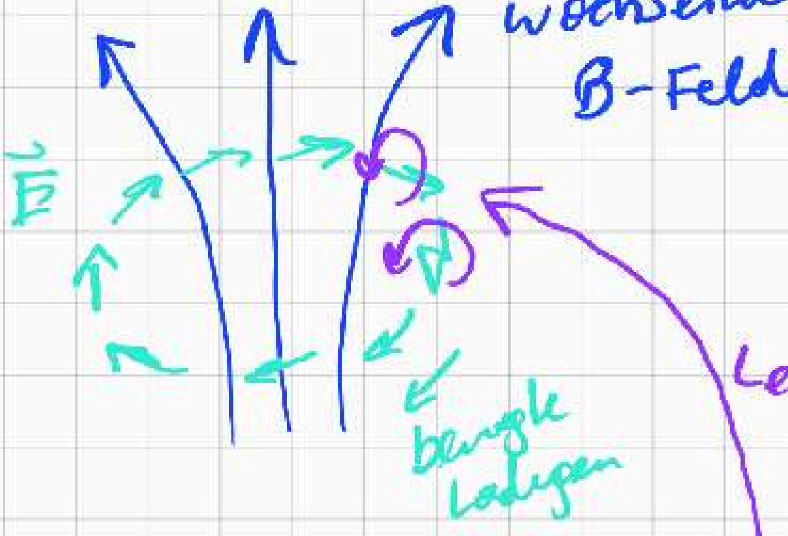
$\Downarrow$

Verschiebungsstrom(dichte)

Bedeutung: Wechsendes E-Feld führt zu Verwirbelung des B-Feldes.

- 3. Maxwell (Induktionsgesetz)

wechsendes B-Feld : zeitliche Änderung des B-Feldes erzeugt ein E-Feld



$$\boxed{\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

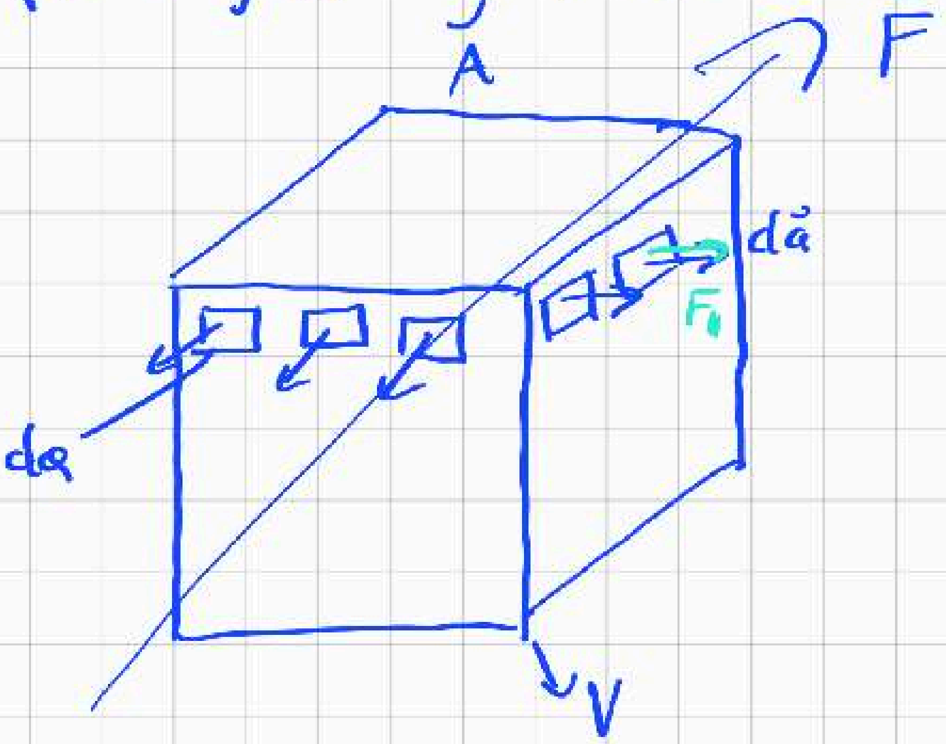
- Maxwell Gleichungen in Integralform:

$\Rightarrow$ Sätze von <u>Gauß</u> & <u>Stokes</u>

– Gaußen Integralsatz

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dV = \oint_A \vec{F}\cdot d\vec{a}$$

RS:



Skalarprodukt „pickt den zu $d\vec{a}$ $\parallel$ verlaufenden Anteil von $\vec{F}$ heraus.

Bedeutung RS: Summe der Anteile von $\vec{F}$, die aus Fläche heraustreten. Das nennt man **Fluss**:

$$\phi = \oint_A \vec{F}\cdot d\vec{a}$$

$$\phi_e = \oint_A \vec{E}\,d\vec{a}$$

$$\phi_m = \oint_A \vec{B}\,d\vec{a}$$

Ⓛⓢ $$\int_V \underbrace{\text{div}\,\vec{F}}\,dV$$

↓

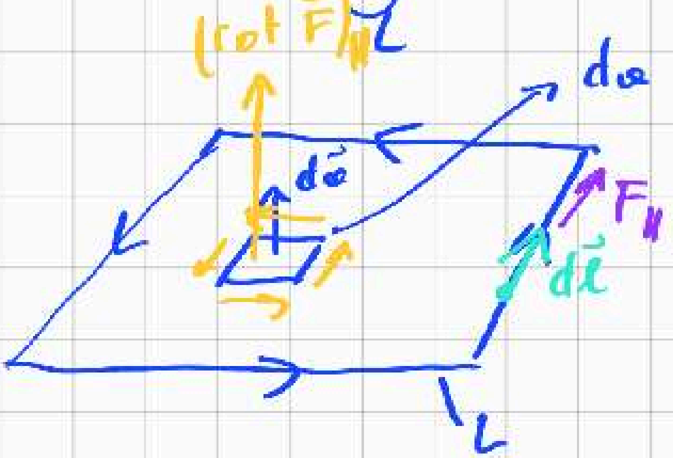
$$\underbrace{\text{Quellen}}_{\vec\nabla\cdot\vec F>0}\ \&\ \underbrace{\text{Senken}}_{\vec\nabla\cdot F<0}$$

Bedeutung LS: Summe aller Quellen & Senken in V

⇒ Gauß Theorem besagt dass die Summe d. Quellen & Senken in V dem <u>Gesamtfluss</u> des Vektorfeldes durch die Oberfläche.

- <u>Stokes Integralform</u>

$$\int_A \text{rot}\,\vec{F}\,da = \oint_L \vec{F}\cdot dl$$



(RS): Skalarprodukt pickt wieder ∥-Anteil des Feldes heraus:

$$U_e = \oint_L \vec{E} \cdot dl \qquad \text{elektr. Spannung}$$

$$U_m = \oint_L \vec{B} \cdot dl$$

Gesamte Rotation eines Vektorfeldes innerhalb einer Fläche entspricht der Rotation des Feldes entlang des Randes L.

(LS) Anteil der Verwirbelung des Feldes ∥ zu $d\vec{a}$ ≙ Verwirbelung entlang/auf der Oberfläche.

Bedeutung für Integralform d. Maxwell Glg

1. Maxwell: $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

Gesamtladung Q die von A umschlossen wird

misst wieviel Anteil des Feldes aus A heraustritt ... Fluss

2. Maxwell: $\boxed{\oint_A \vec{B}\, d\vec{l} = 0}$

$\Rightarrow$ magn. Fluss durch Oberfläche $A = 0$.

- Elektrisches Potential (Coulomb Potential)

$$\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r}} \quad \dots \propto \frac{1}{r}$$

$$\updownarrow$$

Allgem: $\phi = \int_{r_0}^{r_1} E(r)\, dr$

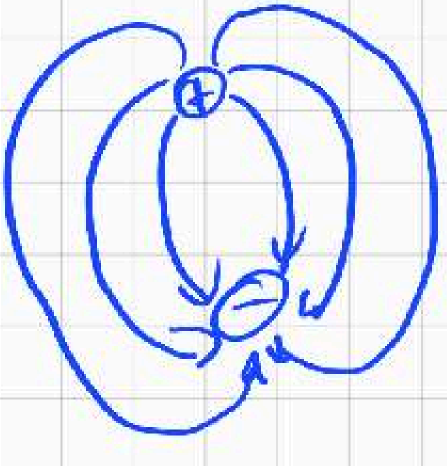
für: $r_0 \to \infty$

Wichtig: Das zum Coulomb Potential gehörige E-Feld:

$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi}$ für statischen Fall

$\boxed{E = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ f. elektrodyn. Fall

- Dipolmoment & Dipolfeld

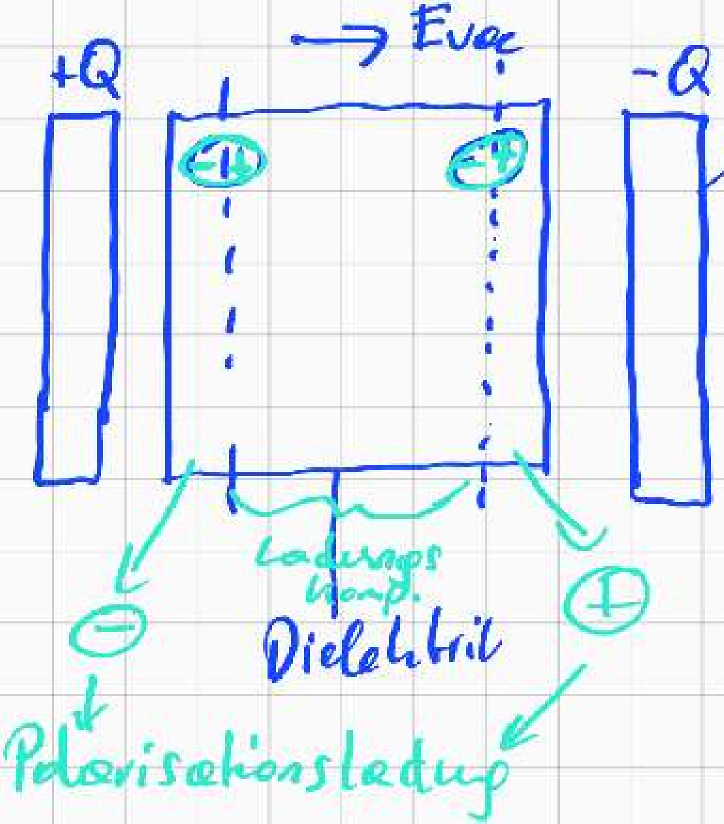


- Aufpunkt

Potential von Dipol:

- ① Potentiale lassen sich addieren
- ② für weit entfernte Aufpunkte lässt sich das durch Reihenentwicklung berechnen

- Plattenkondensator mit Dielektrikum



Kondensatorplatten

- Moleküle im Dielektrikum: <u>Dipole</u>
- Ausrichtung der Dipole im äußeren Feld

- $\vec{E}_{pol}$, entgegengerichtet zu $\vec{E}_{vac}$

$\Rightarrow$ ursprüngliches Feld $\vec{E}_{vac}$ wird abgeschwächt

$\Rightarrow$ Kapazität steigt

• Freie Ladungen & dielektr. Verschiebung

$$\vec{E}_{vac} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

→ freie Ladungen
↓
nur Ladungen auf Kondensatorplatten

Def: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vac}$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$ Maxwell Gleichung

$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}}$ Materialgleichung